Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 8

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
Name des Tutors:	

Ausgabe: 10. Dezember 2014

Abgabe: 19. Dezember 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

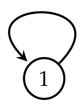
Blatt 8:	/ $20 + 0$
Blätter 1 – 8:	/ $134 + 17$

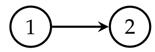
Aufgabe 8.1 ((0.5 + 0.5 + 1 + 1 + 1 + 1) + 2 = 7 Punkte)
Für einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ bezeichnet $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller Isomorphismen von G nach G, das heißt,

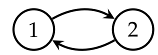
$$\mathrm{Aut}(G) = \{f\colon V \to V \text{ bijektiv} \mid \forall x \in V\ \forall y \in V : (x, y) \in E \iff (f(x), f(y)) \in E\}.$$

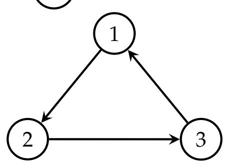
Jedes Element von $\mathrm{Aut}(G)$ heißt *Automorphismus von* G und das Tupel $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ heißt *Automorphismengruppe von* G.

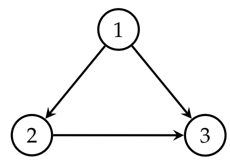
i) Geben Sie die Automorphismen der folgenden Graphen an:

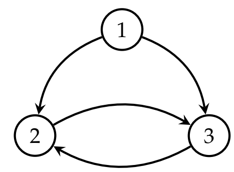
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

ii) Es sei n eine ganze Zahl mit $n \geq 2$. Geben Sie vier verschiedene Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, an so, dass für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt: $|V_i| = n$ und $\mathrm{Aut}(G_i) = \{f\colon V_i \to V_i \mid f \text{ ist bijektiv}\}$.

Lösung 8.1

i) a) Der einzige Automorphismus ist die Identität:

$$\begin{aligned} f\colon \{1\} &\to \{1\}, \\ v &\mapsto v. \end{aligned}$$

b) Der einzige Automorphismus ist die Identität:

$$\begin{aligned} f\colon \{1, 2\} &\to \{1, 2\}, \\ v &\mapsto v. \end{aligned}$$

c) Jede bijektive Abbildung zwischen V und sich selbst ist ein Automorphismus:

$$\left\{ \begin{aligned} f_1\colon \{1, 2\} &\to \{1, 2\}, \\ v &\mapsto v, \end{aligned} \right\} \text{ und } \left\{ \begin{aligned} f_2\colon \{1, 2\} &\to \{1, 2\}, \\ 1 &\mapsto 2, \\ 2 &\mapsto 1. \end{aligned} \right\}$$

d) Die Automorphismen sind die drei „Drehungen um das Zentrum“:

$$\left\{ \begin{aligned} f_1\colon \{1, 2, 3\} &\to \{1, 2, 3\}, \\ v &\mapsto v, \end{aligned} \right\}, \left\{ \begin{aligned} f_2\colon \{1, 2, 3\} &\to \{1, 2, 3\}, \\ 1 &\mapsto 2, \\ 2 &\mapsto 3, \\ 3 &\mapsto 1, \end{aligned} \right\}, \left\{ \begin{aligned} f_3\colon \{1, 2, 3\} &\to \{1, 2, 3\}, \\ 1 &\mapsto 3, \\ 2 &\mapsto 1, \\ 3 &\mapsto 2. \end{aligned} \right\}$$

e) Der einzige Automorphismus ist die Identität:

$$f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\},\\ v \mapsto v.$$

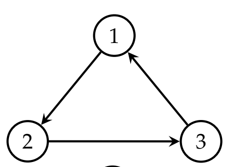
f) Die Automorphismen sind die zwei Spiegelungen an der vertikalen Achse:

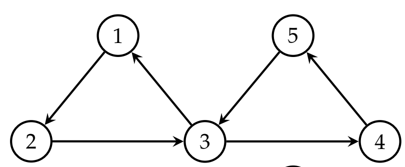
$$\left\{\begin{aligned} f_1\colon \{1,2,3\} &\to \{1,2,3\}, \\ v &\mapsto v, \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} f_2\colon \{1,2,3\} &\to \{1,2,3\}, \\ 1 &\mapsto 1, \\ 2 &\mapsto 3, \\ 3 &\mapsto 2. \end{aligned}\right\}$$

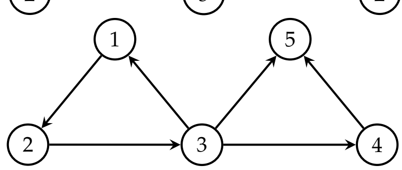
ii) Für jedes $i \in \{1,2,3,4\}$ sei $V_i = V = \{v \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq v \leq n\}$. Die vier gesuchten Graphen sind gegeben durch die Knotenmengen V_1, V_2, V_3 und V_4, und die Kantenmengen $E_1 = \{\}$, $E_2 = \{(v,v) \mid v \in V\}$, $E_3 = \{(v,w) \in V \times V \mid v \neq w\}$ und $E_4 = V \times V$.

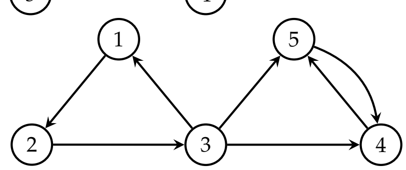
Aufgabe 8.2 (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)
Für einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von G genau dann *strenge Zusammenhangskomponente von* G, wenn G' streng zusammenhängend ist und für jeden streng zusammenhängenden Teilgraphen $G'' = (V'', E'')$ von G entweder $V' \cap V'' = \emptyset$ oder $V'' \subseteq V' \wedge E'' \subseteq E'$ gilt.

Geben Sie die strengen Zusammenhangskomponenten der folgenden Graphen an:

a)


b)


c)


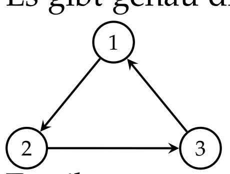
d)


Lösung 8.2

a) Es gibt nur eine strenge Zusammenhangskomponente, nämlich der Graph selbst.

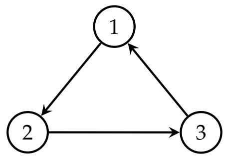
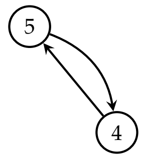
b) Es gibt nur eine strenge Zusammenhangskomponente, nämlich der Graph selbst.

c) Es gibt genau drei strenge Zusammenhangskomponenten, nämlich



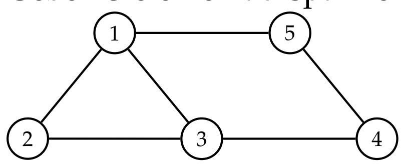
und 4 und 5

d) Es gibt genau zwei strenge Zusammenhangskomponenten, nämlich

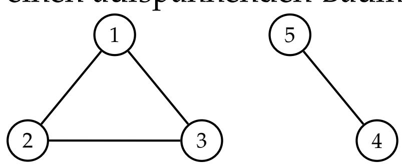
 und 

Aufgabe 8.3 (1 + 1 = 2 Punkte)
Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von G genau dann *aufspannender Baum*, wenn G' ein Baum ist und $V' = V$ gilt.

a) Geben Sie einen aufspannenden Baum des folgenden Graphen an:

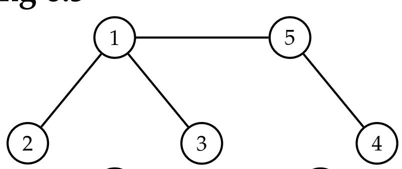


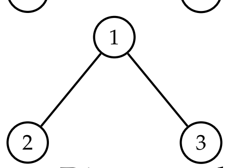
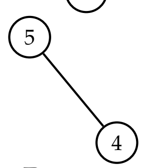
b) Geben Sie für jede Zusammenhangskomponente des folgenden Graphen einen aufspannenden Baum an:



Dabei heißt ein Teilgraph G' eines ungerichteten Graphen G genau dann *Zusammenhangskomponente von* G, wenn der zu G' gehörige gerichtete Graph eine strenge Zusammenhangskomponente des zu G gehörigen gerichteten Graphen ist.

Lösung 8.3

a) 

b)  und 

Achtung: Die angegebenen Bäume sind nicht die einzig möglichen!

Aufgabe 8.4 (1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei der gerichtete Graph $G_n = (V_n, E_n)$ gegeben durch

$$V_n = \{i \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq i \leq n\},$$
$$E_n = \{(i, j) \in V_n \times V_n \mid (i \leq n - 1 \land j = i + 1) \lor (i = n \land j = 1)\}.$$

a) Zeichnen Sie G_1, G_2 und G_5.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $E_{n,k}$ induktiv definiert durch

$$E_{n,1} = E_n,$$
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : E_{n,k} = E_n \circ E_{n,k-1};$$

Ferner sei $G_{n,k}$ der gerichtete Graph $(V_n, E_{n,k})$.

b) Zeichnen Sie $G_{5,2}$ und $G_{6,2}$.

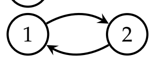
c) Geben Sie $E_{n,2}$ in einer Form analog zur Definition von E_n an.

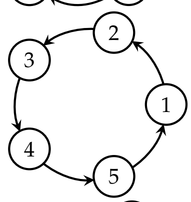
d) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Der Graph $G_{n,2}$ ist genau dann streng zusammenhängend, wenn die Knotenanzahl n ungerade ist.

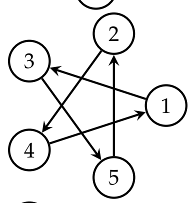
e) Wie viele strenge Zusammenhangskomponenten hat $G_{n,3}$ und wie viele Knoten und Kanten haben diese jeweils?

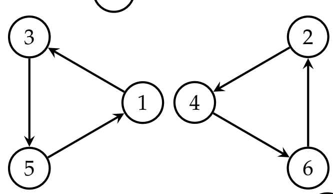
Lösung 8.4

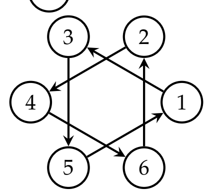
a) Der Graph G_1 ist 

Der Graph G_2 ist 

Der Graph G_5 ist 

b) Der Graph $G_{5,2}$ ist 

Der Graph $G_{6,2}$ ist 

Eine weitere Darstellung von $G_{6,2}$ ist 

c)

$$E_{n,2} = \{(i,j) \in V_n \times V_n \mid (i \leq n-2 \wedge j = i+2) \vee (i = n-1 \wedge j = 1) \vee (i = n \wedge j = 2)\}.$$

d) *Intuition:* Ist n ungerade, so ist $G_{n,2}$ ein Kreis, also streng zusammenhängend. Ist n gerade, so besteht $G_{n,2}$ aus zwei Kreisen, ist also nicht streng zusammenhängend.

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Der Graph $G_{n,2}$ hat genau n Kanten. Für jedes Knotenpaar $(x,y) \in V_n \times V_n$ gilt genau dann $(x,y) \in E_{n,2}$, wenn $y - x = 2$ oder $x = n-1 \wedge y = 1$ oder $x = n \wedge y = 2$. Für jedes Knotenpaar $(x,y) \in V_n \times V_n$ gibt es somit einen Pfad von x nach y, wenn $y - x$ nicht-negativ und gerade ist (im Falle $y - x = 0$ ist dies der Pfad der Länge 0).

Zunächst sei $n = 1$. Dann ist $G_{n,2}$ streng zusammenhängend.

Jetzt sei n ungerade und $n \geq 2$. Weiter seien x und y zwei Knoten von $G_{n,2}$.

Fall 1: x ist ungerade und y ist gerade. Da $n - x$ nicht-negativ und gerade ist, existiert ein Pfad $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ von x nach n. Dann ist $(v_0, v_1, \ldots, v_k, 2)$ ein Pfad von x nach 2. Da $y - 2$ nicht-negativ und gerade ist, existiert ein Pfad $q = (w_0, w_1, \ldots, w_l)$ von 2 nach y. Dann ist $(v_0, v_1, \ldots, v_k, w_0, w_1, \ldots, w_l)$ ein Pfad von x nach y.

Fall 2: x ist gerade und y ist ungerade. Da $(n-1) - x$ nicht-negativ und gerade ist, existiert ein Pfad $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ von x nach $n-1$. Dann ist $(v_0, v_1, \ldots, v_k, 1)$ ein Pfad von x nach 1. Da $y - 1$ nicht-negativ und gerade ist, existiert ein Pfad $q = (w_0, w_1, \ldots, w_l)$ von 1 nach y. Dann ist $(v_0, v_1, \ldots, v_k, w_0, w_1, \ldots, w_l)$ ein Pfad von x nach y.

Fall 3: $x \leq y$ und x und y sind beide gerade oder beide ungerade. Dann ist $y - x$ nicht-negativ und gerade. Also gibt es einen Pfad von x nach y.

Fall 4: $x > y$ und x und y sind beide gerade oder beide ungerade.

Fall 4.1: x und y sind gerade. Da $(n-1) - x$ nicht-negativ und gerade ist, existiert ein Pfad $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ von x nach $n-1$. Dann ist $(v_0, v_1, \ldots, v_k, 1)$ ein Pfad von x nach 1. Da $n - 1$ nicht-negativ und gerade ist, existiert ein Pfad $q = (w_0, w_1, \ldots, w_l)$ von 1 nach n. Dann ist $(w_0, w_1, \ldots, w_l, 2)$ ein Pfad von x nach 2. Da $y - 2$ nicht-negativ und gerade ist, existiert ein Pfad $r = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ von 2 nach y. Insgesamt ist $(v_0, v_1, \ldots, v_k, w_0, w_1, \ldots, w_l, x_0, x_1, \ldots, x_m)$ ein Pfad von x nach y.

Fall 4.2: x und y sind ungerade. Ähnlich zu eben finden wir Pfade $(v_0, v_1, \ldots, v_k, 2)$, $(w_0, w_1, \ldots, w_l, 1)$ und $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ von x nach 2 bzw. 2 nach 1 bzw 1 nach y. Damit ist $(v_0, v_1, \ldots, v_k, w_0, w_1, \ldots, w_l, x_0, x_1, \ldots, x_m)$ ein Pfad von x nach y.

In jedem Fall finden wir einen Pfad von x nach y. Damit ist $G_{n,2}$ streng zusammenhängend.

Nun sei n gerade. Dann ist $n \geq 2$. Also enthält V_n die Knoten 1 und 2. Angenommen es existiert ein Pfad $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ von $v_0 = 1$ nach $v_k = 2$. Für jedes $i \in \mathbb{Z}_k$ ist $(v_i, v_{i+1}) \in E_{n,2}$, also $v_{i+1} - v_i = 2$ oder $v_i = n \wedge v_{i+1} = 2$, und somit $v_{i+1} - v_i$ gerade (beachte, dass n gerade ist). Da $v_0 = 1$ ungerade ist, ist für jedes $i \in \mathbb{Z}_k$ der Knoten $v_{i+1} = 2 + v_i$ ungerade (dies sieht man per vollständige Induktion ein). Insbesondere ist v_k ungerade. Dies steht im Widerspruch zu $v_k = 2$. Somit existiert kein Pfad von 1 nach 2. Damit ist $G_{n,2}$ nicht streng zusammenhängend.

Insgesamt gilt also die behauptete Äquivalenz.

e) Falls n ein Vielfaches von 3 ist, so hat $G_{n,3}$ genau drei strenge Zusammenhangskomponenten, jede dieser Komponenten hat $n/3$ Knoten und ebenso viele Kanten.

Falls n kein Vielfaches von 3 ist, so hat $G_{n,3}$ genau eine strenge Zusammenhangskomponente und diese hat n Knoten und ebenso viele Kanten.