Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 13

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 28. Januar 2015

Abgabe: 6. Februar 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 13:	/ 20 + 2
Blätter 1 – 13:	/ 228 + 23

Aufgabe 13.1 (2 + 4 + 2 = 8 Punkte)
Der ebenso geniale wie überzeugende Wissenschaftler und Superbösewicht Doktor Meta ist siegestrunken. Er hat vor kurzem seinen Widersacher Theorie-Mann (halb Mensch, halb Turingmaschine) gestellt. Es gelang ihm, Theorie-Mann zu überwältigen und umzuprogrammieren. Er folgt jetzt Doktor Metas Willen. Der pfiffige Informatikstudent Marvin Faulsson (der sich gerade für den GBI-Übungsschein und die Klausur angemeldet hat) muss nun mit Schrecken sehen, wie sein ehemals bester Freund Theorie-Mann Doktor Metas unkonkrete Pläne umsetzt. Doch Marvin hat noch nicht aufgegeben. Er will Theorie-Mann überzeugen, dass noch viel gutes in ihm ist, dass Doktor Meta nicht alles, was gut in ihm war, zerstört hat. Theorie-Manns Handlungen werden von der folgenden Grammatik $G = (\{\mathtt{X}\}, \{\mathtt{g}, \mathtt{b}\}, \mathtt{X}, P)$ beschrieben, wobei

$$P = \{\mathtt{X} \to \mathtt{gXb} \mid \mathtt{bXg} \mid \mathtt{XX} \mid \varepsilon\}$$

und $\mathtt{g}$ für „Gutes“ sowie $\mathtt{b}$ für „Böses“ steht.

a) Definieren Sie induktiv die Menge $\mathcal{A}$ aller Ableitungsbäume von G.

b) Zeigen sie durch strukturelle Induktion über die Ableitungsbäume von G, dass gilt:

$$\forall w \in L(G) : \mathrm{N}_{\mathtt{g}}(w) = \mathrm{N}_{\mathtt{b}}(w).$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass es für jedes Wort $w \in L(G)$ einen Ableitungsbaum $A \in \mathcal{A}$ gibt, der eine mögliche Ableitung von w aus $\mathtt{X}$ beschreibt, und, dass für jeden solchen Baum A gilt $\mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A) = \mathrm{N}_{\mathtt{g}}(w)$ sowie $\mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A) = \mathrm{N}_{\mathtt{b}}(w)$, wobei $\mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A)$ und $\mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A)$ die Anzahl der Knoten in A mit Markierung $\mathtt{g}$ bzw. $\mathtt{b}$ sei.

c) Geben Sie eine Grammatik $G' = (N', T', S', P')$ an, deren Produktionenmenge entweder aus alle Produktionen von G außer einer besteht oder aus allen Produktionen von G sowie einer zusätzlichen, derart, dass

$$\forall w \in L(G') : \mathrm{N}_{\mathtt{g}}(w) > \mathrm{N}_{\mathtt{b}}(w).$$

Lösung 13.1

a) Die Menge aller Ableitungsbäume von G ist induktiv definiert durch:

- ```
  X
  |
  ε
  ```
  ist ein Ableitungsbaum von G.
- Für jeden Ableitungsbaum A von G sind
  und
  ```
      X              X
    / | \          / | \
   g  A  b        b  A  g
  ```
  Ableitungsbäume von G.
- Für jedes Paar von Ableitungsbäumen (A, A') von G ist
  ```

$$\begin{array}{ccc} & \mathtt{X} & \\ / & & \backslash \\ A & & A' \end{array}$$

ein Ableitungsbaum von G.
- Alles andere ist kein Ableitungsbaum von G.

b) Die zu beweisende Aussage ist äquivalent zu

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A) = \mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A),$$

Diese Aussage beweisen wir durch strukturelle Induktion über $\mathcal{A}$.

Induktionsanfang: Für den Baum $\begin{array}{c} \mathtt{X} \\ | \\ \varepsilon \end{array}$ ist die Anzahl der Knoten mit Markierung $\mathtt{g}$ bzw $\mathtt{b}$ jeweils 0, also gleich.

Induktionsschritt: Es seien A und $A' \in \mathcal{A}$ so, dass $\mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A) = \mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A)$ und $\mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A') = \mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A')$.

- Für die Bäume $\begin{array}{ccc} & \mathtt{X} & \\ / & | & \backslash \\ \mathtt{g} & A & \mathtt{b} \end{array}$ und $\begin{array}{ccc} & \mathtt{X} & \\ / & | & \backslash \\ \mathtt{b} & A & \mathtt{g} \end{array}$ gilt, dass die Anzahl der Knoten mit Markierung $\mathtt{g}$ gerade $\mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A) + 1$ und jene mit $\mathtt{b}$ gerade $\mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A) + 1$ ist, welche wegen $\mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A) = \mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A)$ gleich sind.
- Für den Baum $\begin{array}{ccc} & \mathtt{X} & \\ / & & \backslash \\ A & & A' \end{array}$ ist die Anzahl der Knoten mit Markierung $\mathtt{g}$ gerade $\mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A) + \mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A')$ und jene mit $\mathtt{b}$ gerade $\mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A) + \mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A')$, welche wegen $\mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A) = \mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A)$ und $\mathrm{N}_{\mathtt{g}}(A') = \mathrm{N}_{\mathtt{b}}(A')$ gleich sind.

c) Will man eine Produktion weglassen, geht das nur so: $G' = (N', T', S', P')$ mit $N' = \{\mathtt{X}\}$, $T' = \{\mathtt{g}, \mathtt{b}\}$, $S' = \mathtt{X}$ und

$$P' = \{\mathtt{X} \to \mathtt{gXb} \mid \mathtt{bXg} \mid \mathtt{XX}\}.$$

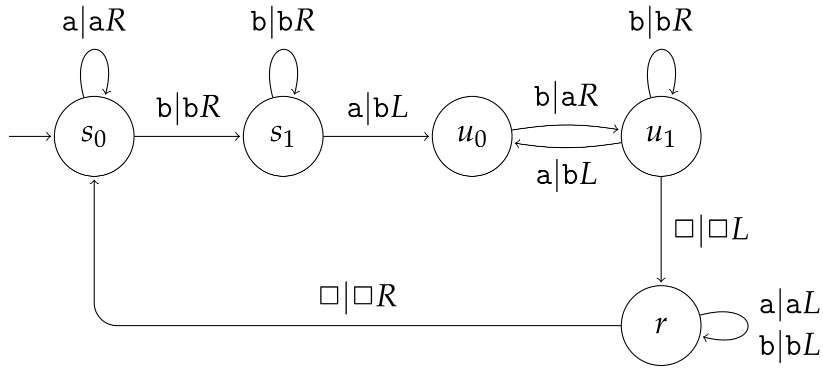
In diesem Fall ist $L(G') = \emptyset$ und die Forderung ist erfüllt.
Mag man eine Produktion hinzunehmen, geht das zum Beispiel so:
$G' = (N', T', S', P')$ mit $N' = \{\mathtt{Y}, \mathtt{X}\}$, $T' = \{\mathtt{g}, \mathtt{b}\}$, $S' = \mathtt{Y}$ und

$$\begin{aligned} P' = \{&\mathtt{Y} \to \mathtt{gX}, \\ &\mathtt{X} \to \mathtt{gXb} \mid \mathtt{bXg} \mid \mathtt{XX} \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Dann ist $L(G') = \{\mathtt{g}\} \cdot L(G)$.

Aufgabe 13.2 (2 Punkte)

Gegeben sei die nachfolgend dargestellte Turingmaschine T mit Zustandsmenge $Z = \{s_0, s_1, u_0, u_1, r\}$, Anfangszustand s_0 und Bandalphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \Box\}$:



Die Eingabe sei ein beliebiges Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$.

a) Für welche Eingabewörter hält T an?
b) In welchen Zuständen kann T für eine Eingabe anhalten?
c) Welches Wort steht für Eingabe w auf dem Band, wenn T anhält?
d) Geben Sie eine Funktion f an mit $\mathrm{Time}_T \in \Theta(f)$.

Lösung 13.2

a) für alle
b) nur in den Zuständen s_0 und s_1
   Erläuterung (war nicht verlangt): In Zustand u_0 ist zwar auch kein Übergang spezifiziert, falls das aktuell gelesene Symbol ein Blank wäre, aber das kann auch nie passieren: Nach u_0 kommt T nur nach einem Schritt nach links, nachdem sie vorher über mindestens ein Nicht-Blank gefahren ist.
c) $\mathtt{a}^{N_\mathtt{a}(w)}\mathtt{b}^{N_\mathtt{b}(w)}$, d. h. „die a und b werden sortiert“.
d) $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+ : n \mapsto n^2$
   Erläuterung (war nicht gefordert): Z. B. für Eingaben der Form $\mathtt{b}^k\mathtt{a}$ fährt die TM in mehreren „Runden“ vom Anfang des Wortes bis zum a und schiebt es dann eine Position nach links. Das macht in den ersten $n/2$ Runden jeweils mindestens $n/2$ Schritte. Also ist $\mathrm{Time}_T \in \Omega(f)$.
   Andererseits wird in jeder Runde jedes a, das „noch nicht am Ziel“ ist, diesem eine Position näher gerückt, und für kein a muss das öfter als n mal gemacht werden. Also ist $\mathrm{Time}_T \in \mathrm{O}(f)$.

Aufgabe 13.3 (7 + 3 = 10 Punkte)

a) Geben Sie graphisch eine Turing-Maschine T mit dem Eingabealphabet $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und höchstens 13 Zuständen an, die die Abbildung $f\colon A^* \to A^*$ berechnet, welche induktiv definiert ist durch

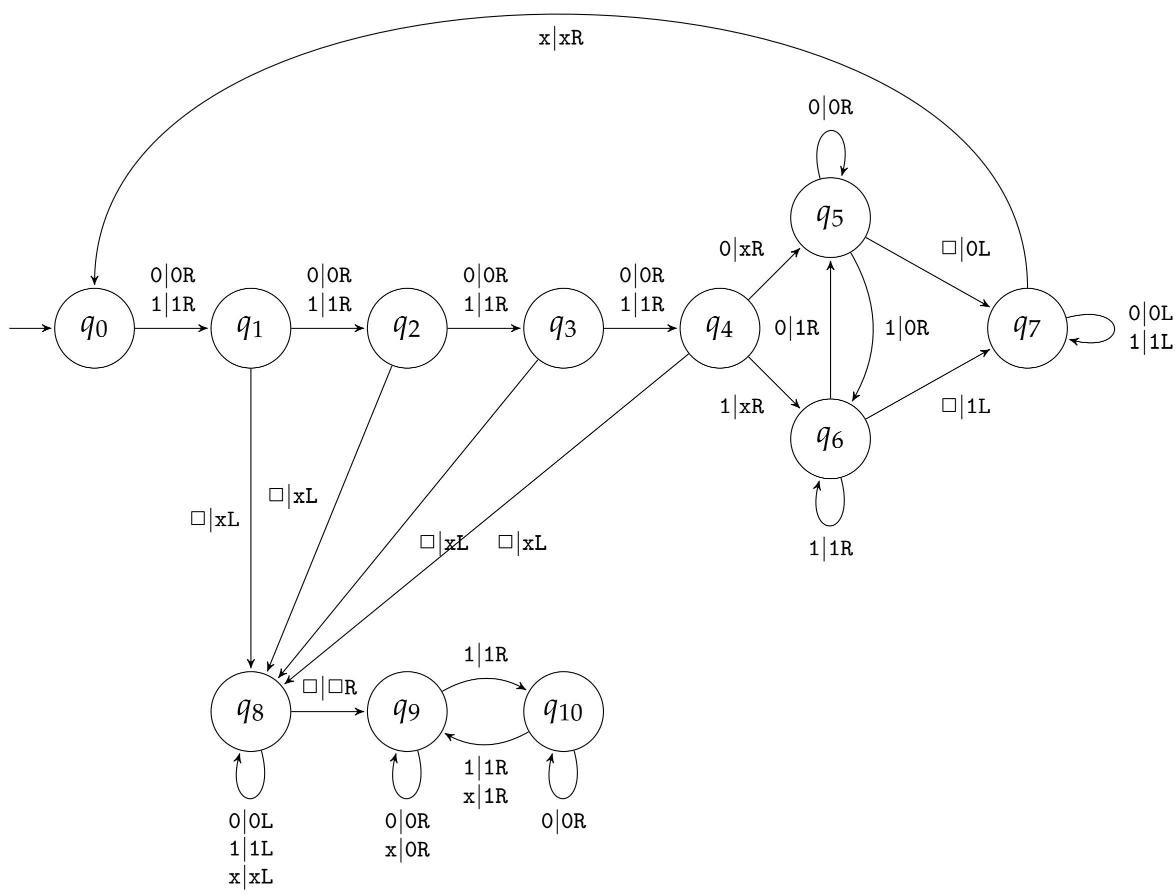
$$f(\epsilon) = \epsilon,$$
$$\forall v \in A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4 : f(v) = v \cdot \mathrm{repr}_2\left(\left(\sum_{i=0}^{|v|-1} \mathrm{num}_2(v_i)\right) \bmod 2\right),$$
$$\forall v \in A^4\ \forall w \in A^+ : f(v \cdot w) = f(v) \cdot f(w).$$

Hinweis: Es gibt eine solche Turing-Maschine mit 11 Zuständen.

b) Geben Sie die Zeit- sowie die Raumkomplexität der Turing-Maschine T asymptotisch an, das heißt, in der Form $\Theta(g)$ für eine geeignete Funktion $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 13.3

a)



b) Die Zeitkomplexität ist $\Theta(n \mapsto n^2)$.

Begründung: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ die Länge des Eingabewortes. Um das erste x einzufügen und wieder dorthin zurück zu gehen, macht die Turing-Maschine etwa $(n + (n-4))$-viele Schritte; für das zweite x etwa $((n-4) + (n-8))$-viele Schritte; und so weiter. Insgesamt werden $\lceil n/4 \rceil$-viele x eingefügt. Zusammen ergibt das

$$
\begin{aligned}
&(2n-4)+(2n-12)+(2n-20)+\cdots\\
&=\sum_{k=1}^{\lceil n/4\rceil} 2n-(4+8k)\\
&=\lceil n/4\rceil\cdot 2n-\lceil n/4\rceil\cdot 4-8\sum_{k=1}^{\lceil n/4\rceil} k\\
&=\lceil n/4\rceil\cdot 2n-\lceil n/4\rceil\cdot 4-8\frac{\lceil n/4\rceil\cdot(\lceil n/4\rceil+1)}{2}\\
&=\lceil n/4\rceil\cdot 2n-\lceil n/4\rceil\cdot 4-4\lceil n/4\rceil\cdot(\lceil n/4\rceil+1)\\
&=\lceil n/4\rceil\cdot 2n-\lceil n/4\rceil\cdot 8-\lceil n/4\rceil^2\\
&\in\Theta(n\mapsto\frac{n^2}{2}-2n-\frac{n^2}{16})\\
&=\Theta(n\mapsto\frac{7n^2}{16}-2n)\\
&=\Theta(n\mapsto n^2).
\end{aligned}
$$

Für die Berechnung der Korrekturbits wird ein Lauf über das Wort mit den eingefügten $\mathtt{x}$ benötigt. Dieses Wort hat die Länge $n+\lceil n/4\rceil$. Die Turing-Maschine benötigt dafür also $\Theta(n\mapsto n)$-viele Schritte.

Die Raumkomplexität ist $\Theta(n\mapsto n)$.
Begründung: Jedes Eingabewort der Größe n wird um $\lceil n/4\rceil$-viele Korrekturbits vergrößert und während der Berechnung werden keine weiteren Speicherstellen auf dem Band benötigt.

***Aufgabe 13.4 (1+1=2 Extrapunkte)**
Es seien A und B zwei endliche Mengen. Wieviele partielle Abbildungen $f\colon A \dashrightarrow B$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 13.4
Es sind $(|B|+1)^{|A|}$. Der Wert entsteht dadurch, dass man für jedes der $|A|$ vielen Argumente unabhängig voneinander einen von $|B|$ vielen Funktionswerten auswählen kann oder die Möglichkeit „undefiniert". Und verschiede solche Auswahlen führen auch stets zu verschiedenen partiellen Funktionen.