Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
14. September 2015

Klausur-nummer			

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Email-Adr.:

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	7	8	4	4	8	8	8
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:			Note:	

Punkte

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 1 = 7 Punkte)

a) Für welche Zahlen $k \in \mathbb{N}_0$ ist die folgende Aussage richtig:

Jeder gerichtete Graph, in dem jeder Knoten Ausgangsgrad k hat, ist nicht streng zusammenhängend.

b) Es sei L die formale Sprache aller Wörter $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ mit der Eigenschaft, dass in w die Teilwörter `ab` und `ba` gleich oft vorkommen.

Ist L regulär?

Begründen Sie kurz Ihre Antwort:

c) Zeichnen Sie einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit 4 Knoten, der die Eigenschaft hat:

$$\forall x \in V \; \forall y \in V \colon (x, y) \in E \vee (y, x) \in E$$

d) Begründen Sie, warum gilt: Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cdot L_2$ eine reguläre Sprache.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

Punkte

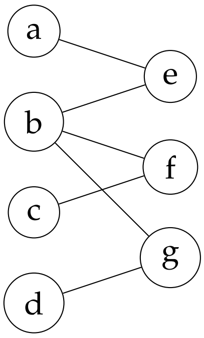
Aufgabe 2 (2 + 1 + 2 + 3 = 8 Punkte)

Ein ungerichteter Graph $U = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls es Teilmengen $T_1 \subseteq V$ und $T_2 \subseteq V$ gibt mit den Eigenschaften

- $T_1 \cap T_2 = \{\}$ (leere Menge)
- $T_1 \cup T_2 = V$
- für jede Kante $\{x, y\} \in E$ ist $x \in T_1 \wedge y \in T_2$ oder $x \in T_2 \wedge y \in T_1$.

a) Geben Sie explizit für jeden der beiden folgenden Graphen passende Teilmengen T_1 und T_2 wie oben an so, dass jeweils klar ist, dass der Graph bipartit ist:

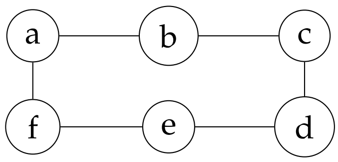
U_1 :



$T_1 =$

$T_2 =$

U_2 :



$T_1 =$

$T_2 =$

b) Zeichnen Sie einen ungerichteten Graphen, der *nicht* bipartit ist:

c) Begründen Sie, warum jeder ungerichtete Baum bipartit ist.

d) Es sei $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_+$, eine positive gerade Zahl. Geben Sie einen ungerichteten Graphen mit n Knoten an, der bipartit ist und möglichst viele Kanten besitzt.

Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Punkte

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

Hinweis: $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Punkte

Aufgabe 4 (2 + 2 = 4 Punkte)

Es seien die beiden formalen Sprachen

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\mathtt{a}^k \mathtt{b}^m \mathtt{c}^{k+m} \mid k, m \in \mathbb{N}_+\} \\ \text{und} \quad L_2 &= \{\mathtt{ccc}\}^+ \end{aligned}$$

gegeben.

a) Geben Sie einen Homomorphismus von $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$ nach $\{\mathtt{c}\}^*$ an, so dass jedes Wort aus L_2 Bild mindestens eines Wortes aus L_1 ist.

b) Begründen Sie, warum es keinen Homomorphismus von $\{\mathtt{c}\}^*$ nach $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$ gibt, der jedes Wort aus L_2 auf ein Wort aus L_1 abbildet.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Punkte

Aufgabe 5 (2 + 1 + 3 + 1 + 1 = 8 Punkte)

Auf der $M = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ aller Paare nichtnegativer ganzer Zahlen wird eine binäre Relation $\equiv$ wie folgt definiert:

$$\forall(a, b) \in M \; \forall(c, d) \in M\colon (a, b) \equiv (c, d) \iff a + d = b + c$$

Diese Relation ist reflexiv und symmetrisch.

a) Zeigen Sie, dass die Relation $\equiv$ transitiv ist.

b) Welche Paare (a, b) sind in der Äquivalenzklasse $[(0, 0)]_\equiv$ von $(0, 0)$ bezüglich $\equiv$?

c) Zeigen Sie: Wenn $(a, b) \equiv (c, d)$ ist und $(x, y) \equiv (u, v)$, dann ist auch $(a + x, b + y) \equiv (c + u, d + v)$.

d) Definieren Sie eine binäre Operation $\boxplus$ auf der Menge $M/_\equiv$ der Äquivalenzklassen so, dass die Aussage in Teilaufgabe c) gerade sicherstellt, dass $\boxplus$ wohldefiniert ist.

e) Geben Sie für ein beliebiges $(a, b) \in M$ ein $(c, d) \in M$ an mit

$$[(a, b)]_\equiv \boxplus [(c, d)]_\equiv = [(0, 0)]_\equiv$$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Punkte

Aufgabe 6 (3 + 3 + 1 + 1 = 8 Punkte)

a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der die formale Sprache erkennt, die durch den regulären Ausdruck `(ab)*(aa)*` beschrieben wird.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die formale Sprache

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+\ell} d^\ell \mid k, \ell, m \in \mathbb{N}_0\}$$

erzeugt.

c) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum des Wortes `abbbccccdd` für Ihre Grammatik aus Teilaufgabe b).

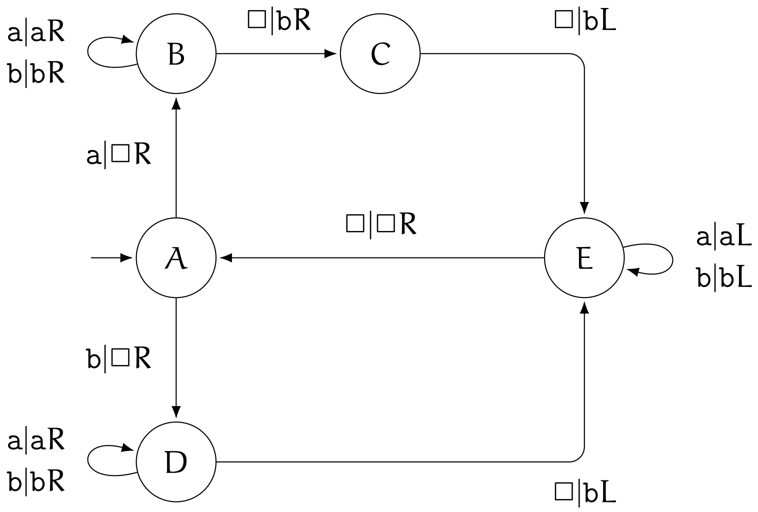
d) Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache aus Teilaufgabe b) beschreibt?

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Punkte

Aufgabe 7 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Gegeben sei die folgende Turingmaschine T mit Bandalphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \square\}$:



Eingabe sei jeweils ein $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ umgeben von Blanksymbolen $\square$.
Der Kopf der Turingmaschine stehe zu Beginn stets auf dem ersten Symbol von w.

a) Notieren Sie für das Eingabewort `baab`, welches Wort aus $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ jeweils auf dem Band steht, wenn die TM T zum ersten, zweiten, dritten und vierten Mal von Zustand E nach Zustand A übergeht.

1.
2.
3.
4.

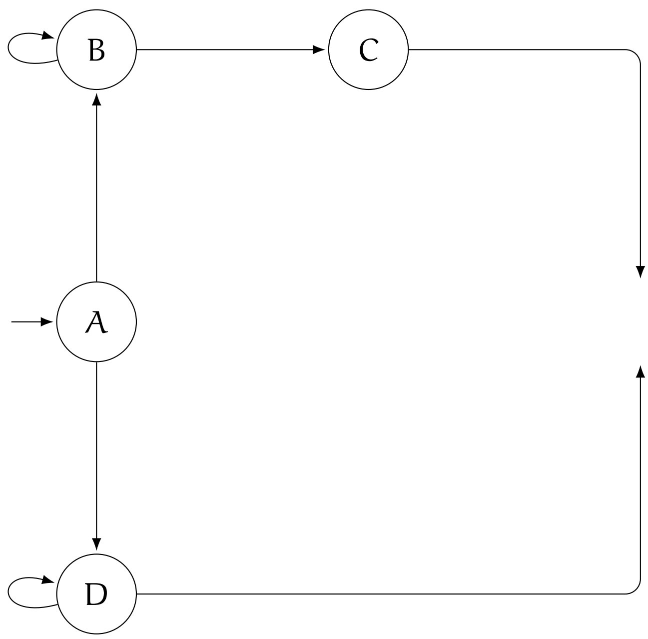
Hinweis: Auf welchen Feldern das Wort jeweils steht, ist gleichgültig, wichtig sind nur die Folgen der `a` und `b`.

b) Erklären Sie, warum sich für jedes Eingabewort die Liste der Bandbeschriftungen bei den Übergängen von Zustand E nach Zustand A (wie in Teilaufgabe a) vorne) nach hinreichend vielen Durchläufen nicht mehr ändert.

c) Ändern Sie die TM T so ab, dass sie

- für jedes Eingabewort nach endlich vielen Schritten hält und
- für jedes Eingabewort nach dem Halten das gleiche Wort auf dem Band steht wie bei der ursprünglichen TM T, wenn sich das Wort, das beim Übergang von Zustand E nach Zustand A auf dem Band steht, nicht mehr ändert.

Geben Sie die neue TM an, indem Sie nachfolgendes Diagramm vervollständigen:



Platz für Antworten zu Aufgabe 7: