Musterlösung (Stand 19.3.2015) zur
Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
4. März 2015

Klausur-nummer			

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Email-Adr.:

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	7	8	7	8	7	8
tats. Punkte						

Gesamtpunktzahl:	

Note:	

Punkte

Aufgabe 1 (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

a) Begründen Sie, warum es keinen endlichen Akzeptor mit Eingabealphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und nur einem Zustand gibt, der die formale Sprache $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$ erkennt.

Wenn nur ein Zustand existiert, dann endet man für jede Eingabe im Anfangszustand. Wenn Akzeptor A akzeptierend ist, ist $L(A) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, wenn er ablehnend ist, ist $L(A) = \{\}$. Das angegebene L ist keines von beidem.

b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

(i) Zu jedem gerichteten Graphen gibt es einen ungerichteten Graphen, der die gleiche Adjazenzmatrix hat.

nein

(ii) Zu jedem gerichteten Graphen gibt es einen ungerichteten Graphen, der die gleiche Wegematrix hat.

nein

(iii) Zu jedem ungerichteten Graphen U gibt es einen gerichteten Graphen G so, dass die Adjazenzmatrix von G die Wegematrix von U ist.

ja

c) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(i) Gilt für jedes $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}_+$: $O(f) \subseteq \Omega(f)$?

nein

(ii) Gilt $O(n^2) \cap O(n) = O(n)$?

ja

(iii) Gilt $O(n^2) \cap \Omega(n^3) = \emptyset$?

ja

(iv) Gilt $O(n^2) + n = O(n^2 + n)$?

nein

Beispiel (nicht verlangt): konstante Funktion $n \mapsto 1$ ist nur in der rechten Menge

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

Punkte

Aufgabe 2 (2 + 1 + 3 + 1 + 1 = 8 Punkte)

Eine Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ formaler Sprachen sei wie folgt definiert:

$$L_0 = \{\,\}$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0\colon\ L_{i+1} = \{\mathtt{ba}\}\, L_i\, \{\mathtt{ab}\} \cup \{\mathtt{b}\}$$

a) Geben Sie L_1, L_2 und L_3 an.

b) Geben Sie $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ an.

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$ an.

d) Zeichnen Sie passend zu Ihrer Grammatik einen Ableitungsbaum eines Wortes $w \in L_3 \setminus L_2$.

e) Gibt es einen regulären Ausdruck R mit $\langle R\rangle = L$?

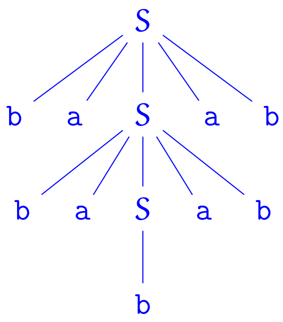
Lösung

a) $L_1 = \{\mathtt{b}\}$
$L_2 = \{\mathtt{babab}, \mathtt{b}\}$
$L_3 = \{\mathtt{bababab}, \mathtt{babab}, \mathtt{b}\}$

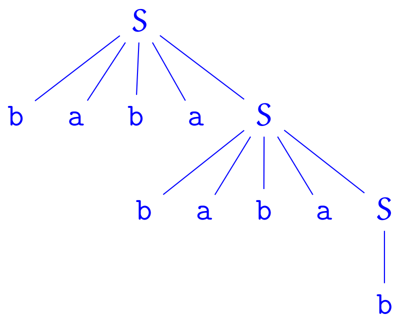
b) $L = \{(\mathtt{ba})^n\mathtt{b}(\mathtt{ab})^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{(\mathtt{baba})^n\mathtt{b} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

c) zwei Möglichkeiten von vielen:

- $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{\ S \to \mathtt{baSab} \mid \mathtt{b}\ \})$
- $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{\ S \to \mathtt{babaS} \mid \mathtt{b}\ \})$

d) 

bzw.



e) ja (wie man anhand der zweiten Grammatik ahnt)

Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Punkte

Aufgabe 3 (1 + 3 + 1 + 2 = 7 Punkte)

Gegeben sei das Wort $w = \texttt{abcdebeebc}$.

a) Bestimmen Sie die Häufigkeiten der in w vorkommenden Symbole.

b) Zeichnen Sie den Huffman-Baum für w.

c) Geben Sie unendlich viele Wörter über dem Alphabet $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}, \texttt{e}\}$ an, für die der Huffman-Baum die gleiche Struktur hat wie Ihr Baum aus Teilaufgabe b).

d) In dieser Teilaufgabe geht es nicht mehr um Huffman-Codierung.

Geben Sie für die Menge von Wörtern

$$L = \{\texttt{a}^i\texttt{b}^{2i}\texttt{c}^{3i} \mid i \in \mathbb{N}_0 \wedge i \geq 42\}$$

eine Codierung $\text{cod} : L \to \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^+$ an, bei der die Codewörter „kurz“ sind. Genauer soll gelten:

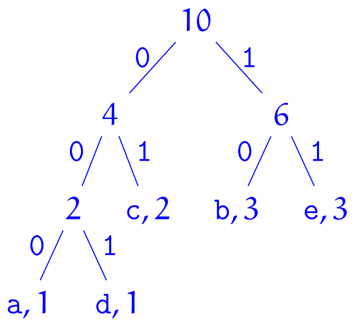
- $\forall w_1, w_2 \in L \colon |w_1| < |w_2| \Rightarrow |\text{cod}(w_1)| \leq |\text{cod}(w_2)|$
- Es gibt ein $f \in O(\log)$ so, dass $\forall w \in L \colon |\text{cod}(w)| \leq f(|w|)$

Lösung

a)

a	b	c	d	e
1	3	2	1	3

b)



c) z. B. alle Wörter der Form w^n mit $n \in \mathbb{N}_+$

d) z. B. $\text{cod}(\texttt{a}^i\texttt{b}^{2i}\texttt{c}^{3i}) = \text{Repr}_2(i - 42)$

Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Punkte

Aufgabe 4 (2 + 1 + 4 + 1 = 8 Punkte)

Gegeben seien das Alphabet $A = \{a, b\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die formale Sprache $L_n \subseteq A^*$ durch

$$L_n = \{w \in A^* \mid |w| \leq n \wedge \forall i \in \mathbb{Z}_{|w|} : w_i = w_{|w|-i-1}\}$$

a) Geben Sie L_0, L_1, L_2 und L_3 an.

b) Drücken Sie für $i \in \mathbb{N}_+$ die Sprache L_{i+1} in der Form

$$L_{i+1} = L_i \cup \dots\dots$$

aus, wobei Sie statt der Pünktchen einen Ausdruck einsetzen sollen, in dem (unter Umständen mehrfach) L_{i-1} vorkommt und weitere Bestandteile, in denen kein L_n vorkommt.

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es einen regulären Ausdruck R_n, der L_n beschreibt, das heißt, für den gilt: $\langle R_n \rangle = L_n$.

d) Es sei $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$. Existiert ein regulärer Ausdruck R mit $\langle R \rangle = L$?

Lösung

(es geht um die Palindrome …)

a) $L_0 = \{\varepsilon\}$
$L_1 = \{\varepsilon, a, b\}$
$L_2 = \{\varepsilon, a, b, aa, bb\}$
$L_3 = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, bbb\}$

b) $L_{i+1} = L_i \cup \{a\}L_{i-1}\{a\} \cup \{b\}L_{i-1}\{b\}$

c) **Induktionsanfang:** $i = 0$: $R_0 = \emptyset*$ und $i = 1$: $R_1 = \emptyset* \mid a \mid b$

Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_+$ gelte: L_n und L_{n-1} sind durch reguläre Ausdrücke R_n bzw. R_{n-1} beschreibbar.

Induktionsschluss: zu zeigen: L_{n+1} ist durch einen regulären Ausdruck beschreibbar.

Wähle $R_{n+1} = R_n \mid aR_{n-1}a \mid bR_{n-1}b$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle R_{n+1} \rangle &= \langle R_n \mid aR_{n-1}a \mid bR_{n-1}b \rangle \\ &= \langle R_n \rangle \cup \{a\}\langle R_{n-1} \rangle\{a\} \cup \{b\}\langle R_{n-1} \rangle\{b\} \\ &= L_n \cup \{a\}L_{n-1}\{a\} \cup \{b\}L_{n-1}\{b\} \\ &= L_{n+1} \end{aligned}$$

d) nein

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Punkte

Aufgabe 5 (2 + 1 + 1 + 3 = 7 Punkte)

Es sei $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Es sei $\mathcal{R}$ die Menge aller regulären Ausdrücke über dem Alphabet X.

Auf $\mathcal{R}$ werde die Relation $\equiv$ definiert vermöge

$$\forall R_1 \in \mathcal{R}\ \forall R_2 \in \mathcal{R}\colon R_1 \equiv R_2 \iff \langle R_1 \rangle = \langle R_2 \rangle$$

a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist, also reflexiv, symmetrisch und transitiv.

b) Es sei $\mathcal{L}_{reg}$ die Menge aller regulären Sprachen über dem Alphabet X. Geben Sie eine Abbildung f von $\mathcal{R}$ nach $\mathcal{L}_{reg}$ an, die mit $\equiv$ auf $\mathcal{R}$ verträglich ist und für die gilt:

$$\forall R_1 \in \mathcal{R}\ \forall R_2 \in \mathcal{R}\colon f(R_1) = f(R_2) \implies R_1 \equiv R_2$$

c) Warum ist die Abbildung

$$\begin{aligned} g\colon \mathcal{R}/_{\equiv} &\to \mathcal{L}_{reg} \\ [R]_{\equiv} &\mapsto f(R) \end{aligned}$$

wohldefiniert?

d) Mitteilung: Die Abbildung f aus Teilaufgabe b) ist surjektiv.

Beweisen Sie, dass die Abbildung g aus Teilaufgabe c) bijektiv ist.

Lösung

a) *reflexiv:* Da für jede regulären Ausdruck R $\langle R \rangle = \langle R \rangle$ ist, ist auch immer $R \equiv R$.

symmetrisch: für alle $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ folgt aus $\langle R_1 \rangle = \langle R_2 \rangle$ auch $\langle R_2 \rangle = \langle R_1 \rangle$, also gilt $R_1 \equiv R_2 \Rightarrow R_2 \equiv R_1$

transitiv: für alle $R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{R}$ folgt aus $\langle R_1 \rangle = \langle R_2 \rangle$ und $\langle R_2 \rangle = \langle R_3 \rangle$ auch $\langle R_1 \rangle = \langle R_3 \rangle$, also gilt $R_1 \equiv R_2 \wedge R_2 \equiv R_3 \Rightarrow R_1 \equiv R_3$

b) $f(R) = \langle R \rangle$

c) weil f mit $\equiv$ verträglich ist

d) *surjektiv:* Es sei $L \in \mathcal{L}_{reg}$. Da f surjektiv ist, gibt es ein R mit $f(R) = L$. Dann ist aber auch $g([R]_{\equiv}) = f(R) = L$. Also ist g surjektiv.

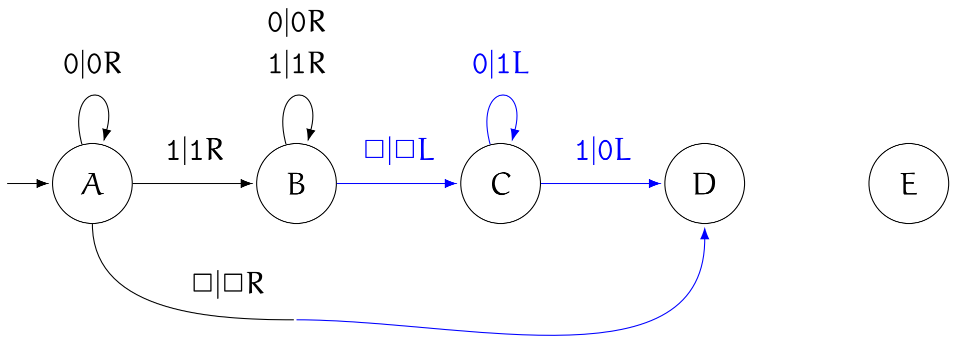
injektiv: Es sei $[R_1]_{\equiv} \neq [R_2]_{\equiv}$. Dann ist $R_1 \not\equiv R_2$, also $\langle R_1 \rangle \neq \langle R_2 \rangle$, also $f(R_1) \neq f(R_2)$, also $g([R_1]_{\equiv}) \neq g([R_2]_{\equiv})$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Punkte

Aufgabe 6 (3 + 3 + 2 = 8 Punkte)

Gegeben sei der folgende Teil einer Turingmaschine T mit Bandalphabet $X = \{0, 1, \square\}$:



Eingabe sei jeweils ein $w \in \{0, 1\}^+$ umgeben von Blanksymbolen $\square$. Der Kopf der Turingmaschine stehe zu Beginn stets auf dem ersten Symbol von w.

a) Ergänzen Sie das Diagramm so, dass die entstehende Turingmaschine T für jede Eingabe $w \in \{0, 1\}^+$ anhält und am Ende auf dem Band das Wort $w' \in \{0, 1\}^+$ steht, für das gilt:

   (i) $|w'| = |w|$

   (ii) $\mathrm{Num}_2(w') = \begin{cases} \mathrm{Num}_2(w) - 1 & \text{falls } \mathrm{Num}_2(w) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

   Hinweise: Sie müssen nicht alle angegebenen Zustände verwenden. Sie sollten auch keine zusätzlichen Zustände verwenden (falls doch, gibt es Punktabzug). Wo in der Endkonfiguration der Kopf steht, ist gleichgültig.

b) Geben Sie für die Eingabe $w = 0100$ alle Konfigurationen an, die Ihre Turingmaschine bis zum Halten durchläuft.

   Nutzen Sie dazu die Raster auf der Folgeseite. Notieren Sie nur den Teil des Bandes, der *keine* Blanksymbole enthält

c) Bei der Beantwortung der folgenden Teilaufgaben dürfen Sie *keine* trigomometrischen Funktionen (sin, cos, ...) verwenden:

   (i) Geben Sie eine Funktion f an mit $\mathrm{Time}_T \notin O(f)$.

   $f(n) = 1$

   (ii) Geben Sie eine Funktion g an mit $\mathrm{Time}_T \notin \Omega(g)$.

   $g(n) = n^2$

Platz für Antworten zu Aufgabe 6b):
Schreiben Sie jeweils in die untere Zeile eines Kastens die Bandbeschriftung und in die obere über dem aktuell besuchten Feld den Zustand. Füllen Sie erst die linke Spalte, danach die rechte. Die Anfangskonfiguration ist angegeben. Es steht mehr Platz zur Verfügung als nötig.

	A				
	0	1	0	0	

		A			
	0	1	0	0	

			B		
	0	1	0	0	

				B	
	0	1	0	0	

					B
	0	1	0	0	

				C	
	0	1	0	0	

			C		
	0	1	0	1	

		C			
	0	1	1	1	

	D				
	0	0	1	1	

Platz für Antworten zu Aufgabe 6: