Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
14. September 2015
Lösungsvorschläge

Klausur-nummer			

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Email-Adr.:

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	7	8	4	4	8	8	8
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:		Note:	

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 1 = 7 Punkte)

Punkte

a) Für welche Zahlen $k \in \mathbb{N}_0$ ist die folgende Aussage richtig:

Jeder gerichtete Graph, in dem jeder Knoten Ausgangsgrad k hat, ist nicht streng zusammenhängend.

Die Aussage ist für *kein* k richtig.
Zur Ihrer Information: Für $k \in \mathbb{N}_+$ ist die Aussage falsch, da der gerichtete Graph mit k Knoten und einer gerichteten Kante von jedem zu jedem Knoten streng zusammenhängend ist.
Für $k = 0$ ist die Aussage falsch für den Graphen mit nur einem Knoten und keiner Kante.

b) Es sei L die formale Sprache aller Wörter $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ mit der Eigenschaft, dass in w die Teilwörter `ab` und `ba` gleich oft vorkommen.

Ist L regulär?

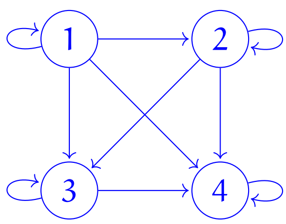
ja

Begründen Sie kurz Ihre Antwort:

Die Teilwörter `ab` und `ba` kommen streng abwechselnd vor. Damit deren Anzahl gleich ist, müssen das erste und das letzte solche Teilwort verschieden sein. Das kann ein endlicher Akzeptor überprüfen. Oder ein regulärer Ausdruck beschreiben: `(aa*bb*)*aa*|(bb*aa*)*bb*`

c) Zeichnen Sie einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit 4 Knoten, der die Eigenschaft hat:

$$\forall x \in V \; \forall y \in V \colon (x, y) \in E \vee (y, x) \in E$$



d) Begründen Sie, warum gilt: Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cdot L_2$ eine reguläre Sprache.

Eine formale Sprache ist genau dann regulär, wenn ein regulärer Ausdruck existiert, der sie erkennt. Sind L_1 und L_2 reguläre Sprachen, so existieren reguläre Ausdrücke R_1 und R_2, die die entsprechende Sprache erkennen. Da der reguläre Ausdruck $R_1 \cdot R_2$ die formale Sprache $L_1 \cdot L_2$ erkennt, ist letztere regulär.

Punkte

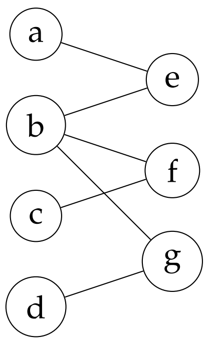
Aufgabe 2 (2 + 1 + 2 + 3 = 8 Punkte)

Ein ungerichteter Graph $U = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls es Teilmengen $T_1 \subseteq V$ und $T_2 \subseteq V$ gibt mit den Eigenschaften

- $T_1 \cap T_2 = \{\}$ (leere Menge)
- $T_1 \cup T_2 = V$
- für jede Kante $\{x, y\} \in E$ ist $x \in T_1 \wedge y \in T_2$ oder $x \in T_2 \wedge y \in T_1$.

a) Geben Sie explizit für jeden der beiden folgenden Graphen passende Teilmengen T_1 und T_2 wie oben so an, dass jeweils klar ist, dass der Graph bipartit ist:

U_1 :

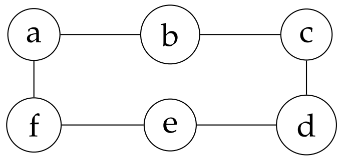


Lösung

$T_1 = \{a, b, c, d\}$

$T_2 = \{e, f, g\}$

U_2 :



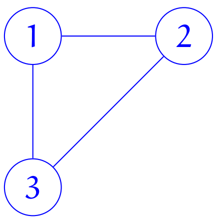
Lösung

$T_1 = \{a, c, e\}$

$T_2 = \{b, d, f\}$

b) Zeichnen Sie einen ungerichteten Graphen, der *nicht* bipartit ist:

Lösung



c) Begründen Sie, warum jeder ungerichtete Baum bipartit ist.

Lösung

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Baum. Wir wählen eine Wurzel $w \in V$. Für jeden Knoten $v \in V$ heißt 1 plus die Länge des kürzesten Weges von w nach v *Tiefe von* v. Die Wurzel hat also Tiefe 1, die zur Wurzel adjazenten Knoten Tiefe 2, und so weiter. Die Menge T_1 enthalte genau jene Knoten deren Tiefe ungerade ist und die Menge T_2 genau jene deren Tiefe gerade ist. Diese zwei Mengen sind Zeugen dafür, dass der Baum G bipartit ist.

d) Es sei $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_+$, eine positive gerade Zahl. Geben Sie einen ungerichteten Graphen mit n Knoten an, der bipartit ist und möglichst viele Kanten besitzt.

Lösung

Es sei V die Menge $\mathbb{Z}_n$. Weiter seien T_1 und T_2 die Mengen $\mathbb{Z}_k$ bzw. $V \setminus \mathbb{Z}_k$. Diese partitionieren V und enthalten jeweils k Knoten. Ferner sei E die Menge

$$\{\{x, y\} \mid (x \in T_1 \wedge y \in T_2) \vee (x \in T_2 \wedge y \in T_1)\}.$$

Der Graph $G = (V, E)$ ist bipartit und hat unter allen bipartiten Graphen mit n Knoten die größte Anzahl Kanten, nämlich k^2 viele.

Punkte

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

Hinweis: $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.

Lösung

Induktionsanfang. Für $n = 1$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = 1^2 = 1 = 1^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3.$$

Induktionsschritt. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ derart, dass die Induktionsvoraussetzung

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i + (n+1)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)(n+1) + (n+1)^2 \\
&\underset{\text{Hinweis}}{\overset{\text{I.V.}}{=}} \sum_{i=1}^{n} i^3 + 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)(n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} i^3.
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 4 (2 + 2 = 4 Punkte)

Punkte

Es seien die beiden formalen Sprachen

$$\begin{aligned} & L_1 = \{a^k b^m c^{k+m} \mid k, m \in \mathbb{N}_+\} \\ \text{und} \quad & L_2 = \{ccc\}^+ \end{aligned}$$

gegeben.

a) Geben Sie einen Homomorphismus von $\{a, b, c\}^*$ nach $\{c\}^*$ so an, dass jedes Wort aus L_2 Bild mindestens eines Wortes aus L_1 ist.

Lösung

Der Homomorphismus φ sei induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi\colon \{a, b, c\}^* &\longrightarrow \{c\}^*, \\ a &\longmapsto c, \\ b &\longmapsto \varepsilon, \\ c &\longmapsto \varepsilon, \\ \forall x \in \{a, b, c\}\, \forall w \in \{a, b, c\}^*\colon x \cdot w &\longmapsto \varphi(x) \cdot \varphi(w). \end{aligned}$$

Für jedes Wort $w \in L_2$ existiert ein $k \in \mathbb{N}_+$ so, dass $w = (ccc)^k = c^{3k}$ und somit bildet φ jedes Wort aus L_2 der Gestalt $a^{3k} b^m c^{3k+m}$ auf w ab.

b) Begründen Sie, warum es keinen Homomorphismus von $\{c\}^*$ nach $\{a, b, c\}^*$ gibt, der jedes Wort aus L_2 auf ein Wort aus L_1 abbildet.

Lösung

Es sei φ ein Homomorphismus von $\{c\}^*$ nach $\{a, b, c\}^*$. Weiter sei $w = \varphi(c)$. Es gilt $\varphi(ccc) = w \cdot w \cdot w$. Im Falle $w = \varepsilon$ gilt $\varphi(ccc) = \varepsilon \notin L_1$. Im Falle $w \neq \varepsilon$ gilt $\varphi(ccc) = w \cdot w \cdot w \notin L_1$, da kein Wort in L_1 eine Zerlegung dieser Form besitzt.

Oder: Wenn $w = \varphi(ccc) \in L_1$ ist, dann beginnt w mit einem a und endet mit einem c. Dann enthält aber $\varphi(cccccc) = ww$ in der Mitte das Teilwort ca, das in keinem Wort aus L_1 vorkommt.

Punkte

Aufgabe 5 (2 + 1 + 3 + 1 + 1 = 8 Punkte)

Auf der Menge $M = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ aller Paare nichtnegativer ganzer Zahlen wird eine binäre Relation $\equiv$ wie folgt definiert:

$$\forall (a, b) \in M \; \forall (c, d) \in M\colon (a, b) \equiv (c, d) \iff a + d = b + c$$

Diese Relation ist reflexiv und symmetrisch.

a) Zeigen Sie, dass die Relation $\equiv$ transitiv ist.

Lösung

Es seien (a, b), (c, d) und $(e, f) \in M$ derart, dass $(a, b) \equiv (c, d)$ und $(c, d) \equiv (e, f)$. Dann gelten $a + d = b + c$ und $c + f = d + e$. Somit gilt

$$\begin{aligned} a + f = b + e &\iff (a + f) + d = (b + e) + d \\ &\iff (a + d) + f = b + (d + e) \\ &\iff (b + c) + f = b + (c + f) \\ &\iff (b + c) + f = (b + c) + f \\ &\iff 0 = 0. \end{aligned}$$

Da $0 = 0$ wahr ist, gilt $a + f = b + e$. Damit gilt $(a, b) \equiv (e, f)$. Insgesamt folgt, dass $\equiv$ transitiv ist.

b) Welche Paare (a, b) sind in der Äquivalenzklasse $[(0, 0)]_\equiv$ von $(0, 0)$ bezüglich $\equiv$?

Lösung

Alle geordneten Paare der Gestalt (a, a) mit $a \in \mathbb{N}_0$.

c) Zeigen Sie: Wenn $(a, b) \equiv (c, d)$ ist und $(x, y) \equiv (u, v)$, dann ist auch $(a + x, b + y) \equiv (c + u, d + v)$.

Lösung

Es seien $(a, b) \equiv (c, d)$ und $(x, y) \equiv (u, v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (a + x) + (d + v) &= (a + d) + (x + v) \\ &= (b + c) + (y + u) \\ &= (b + y) + (c + u). \end{aligned}$$

Somit gilt $(a + x, b + y) \equiv (c + u, d + v)$.

d) Definieren Sie eine binäre Operation $\boxplus$ auf der Menge $M/_\equiv$ der Äquivalenzklassen so, dass die Aussage in Teilaufgabe c) gerade sicherstellt, dass $\boxplus$ wohldefiniert ist.

Lösung

$$\boxplus\colon M/_{\equiv} \times M/_{\equiv} \to M/_{\equiv},$$
$$([(a,b)]_{\equiv}, [(x,y)]_{\equiv}) \mapsto [(a+x, b+y)]_{\equiv}.$$

e) Geben Sie für ein beliebiges $(a,b) \in M$ ein $(c,d) \in M$ an mit

$$[(a,b)]_{\equiv} \boxplus [(c,d)]_{\equiv} = [(0,0)]_{\equiv}$$

Lösung

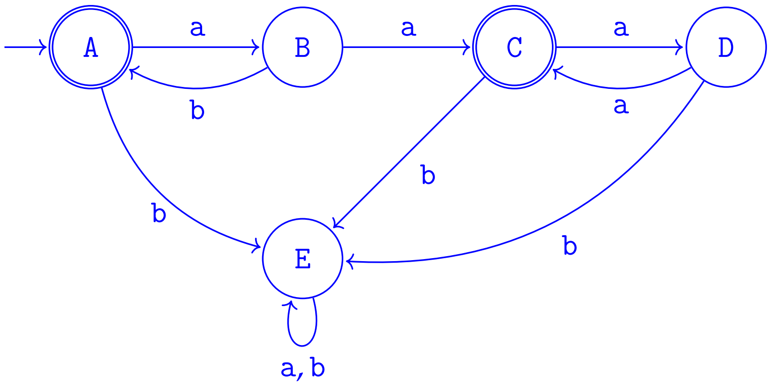
Eine Lösung ist $(c,d) = (b,a)$.

Punkte

Aufgabe 6 (3 + 3 + 1 + 1 = 8 Punkte)

a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der die formale Sprache erkennt, die durch den regulären Ausdruck `(ab)*(aa)*` beschrieben wird.

Lösung



b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die formale Sprache

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+\ell} d^\ell \mid k, \ell, m \in \mathbb{N}_0\}$$

erzeugt.

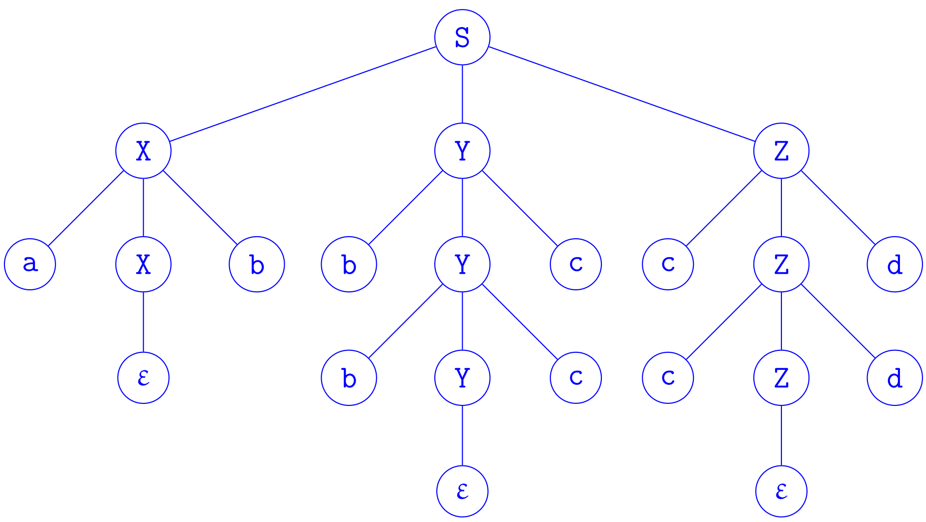
Lösung

$G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, X, Y, Z\}$, $T = \{a, b, c, d\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{S &\longrightarrow XYZ, \\ X &\longrightarrow aXb \mid \epsilon, \\ Y &\longrightarrow bYc \mid \epsilon, \\ Z &\longrightarrow cZd \mid \epsilon\}. \end{aligned}$$

c) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum des Wortes `abbbccccdd` für Ihre Grammatik aus Teilaufgabe b).

Lösung



d) Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache aus Teilaufgabe b) beschreibt?

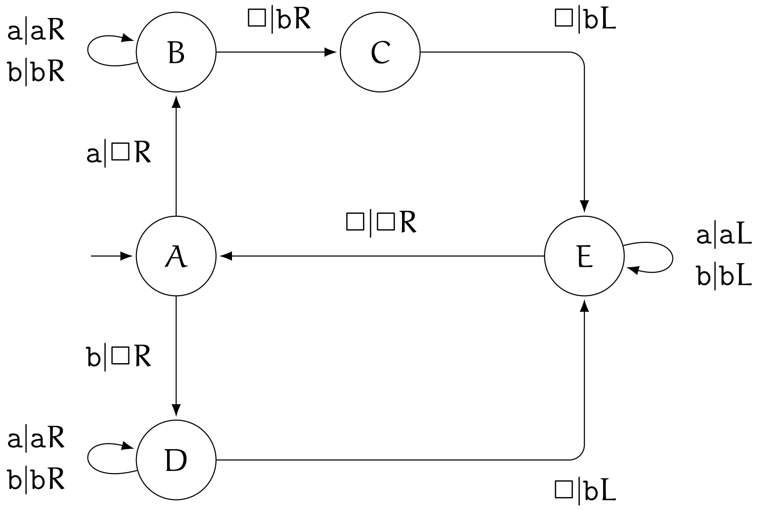
Lösung

Nein.

Punkte

Aufgabe 7 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Gegeben sei die folgende Turingmaschine T mit Bandalphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \square\}$:



Eingabe sei jeweils ein $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ umgeben von Blanksymbolen $\square$.
Der Kopf der Turingmaschine stehe zu Beginn stets auf dem ersten Symbol von w.

a) Notieren Sie für das Eingabewort baab, welches Wort aus $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ jeweils auf dem Band steht, wenn die TM T zum ersten, zweiten, dritten und vierten Mal von Zustand E nach Zustand A übergeht.

1. aabb
2. abbbb
3. bbbbbb
4. bbbbbb

Hinweis: Auf welchen Feldern das Wort jeweils steht, ist gleichgültig, wichtig sind nur die Folgen der a und b.

b) Erklären Sie, warum sich für jedes Eingabewort die Liste der Bandbeschriftungen bei den Übergängen von Zustand E nach Zustand A (wie in Teilaufgabe a) vorne) nach hinreichend vielen Durchläufen nicht mehr ändert.

Lösung

(a) Wenn das erste Symbol ein b ist, wird es am Anfang gelöscht und am Ende angefügt. Die Anzahl der a und b ändert sich also nicht.

(b) Wenn das erste Symbol ein a ist, wird es am Anfang gelöscht und am Ende werden zwei b angefügt. Die Anzahl der a wird also um 1 kleiner und die der b um 2 größer.

Wegen des Löschens am Anfang und des Anfügens am Ende wird jedes der ursprünglichen Symbole irgendwann betrachtet. Also sind irgendwann alle a gelöscht. Ab diesem Zeitpunkt ändert sich das Wort beim Übergang $E \longrightarrow A$ nicht mehr.

c) Ändern Sie die TM T so ab, dass sie

- für jedes Eingabewort nach endlich vielen Schritten hält und
- für jedes Eingabewort nach dem Halten das gleiche Wort auf dem Band steht wie bei der ursprünglichen TM T, wenn sich das Wort, das beim Übergang von Zustand E nach Zustand A auf dem Band steht, nicht mehr ändert.

Geben Sie die neue TM an, indem Sie nachfolgendes Diagramm vervollständigen: