Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 3

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 11. November 2015

Abgabe: 20. November 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 3:	/ 18	(Physik: 18)
Blätter 1 – 3:	/ 48	(Physik: 45)

Aufgabe 3.1 (2 + 4 = 6 Punkte)
Die Zahlen x_n, $n \in \mathbb{N}_0$, seien induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_+ \colon x_n &= n - x_{n-1}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Zahlenwerte von x_1, x_2, x_3 und x_4 an.
b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 3.2 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

a) Es sei $w = \mathtt{10011}$. Geben Sie $u = \mathrm{Num}_2(w)$ und $v = \mathrm{Num}_3(w)$ an.
b) Geben Sie $\mu = \mathrm{Repr}_3(285)$ und $\nu = \mathrm{Repr}_9(285)$ an.
c) Das Wort μ der vorangegangenen Teilaufgabe hat die Länge 6. Geben Sie $\xi = \mathrm{Repr}_9(\mathrm{Num}_3(\mu(0)\mu(1))) \cdot \mathrm{Repr}_9(\mathrm{Num}_3(\mu(2)\mu(3))) \cdot \mathrm{Repr}_9(\mathrm{Num}_3(\mu(4)\mu(5)))$ und $\zeta = \mathrm{Num}_9(\xi)$ an.
   Erinnerung: Für jedes $i \in \mathbb{Z}_6$ ist $\mu(i)$ das i-te Zeichen des Wortes μ.

Aufgabe 3.3 (2 + 4 + 3 = 9 Punkte)
Die Abbildung I sei induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} I \colon \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* &\to \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*, \\ \epsilon &\mapsto \mathtt{1}, \\ w \cdot \mathtt{0} &\mapsto w \cdot \mathtt{1}, \text{ wobei } w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*, \\ w \cdot \mathtt{1} &\mapsto I(w) \cdot \mathtt{0}, \text{ wobei } w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $I(\epsilon)$, $I(I(\epsilon))$, $I(I(I(\epsilon)))$ und $I(I(I(I(\epsilon))))$.
b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über die Wortlänge, dass für jedes $w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ gilt:

$$\text{Es gibt ein } i \in \mathbb{Z}_{|I(w)|} \text{ so, dass } (I(w))(i) = \mathtt{1}.$$

   Erinnerung: Für jedes $w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ und jedes $i \in \mathbb{Z}_{|I(w)|}$ ist $(I(w))(i)$ das i-te Zeichen des Wortes $I(w)$.
c) Es sei $E = \{u \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid \text{es gibt ein } i \in \mathbb{Z}_{|u|} \text{ so, dass } u(i) = \mathtt{1}\}$. Nach der vorangegangenen Teilaufgabe gilt $I(w) \in E$ für jedes $w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$. Definieren Sie induktiv eine Abbildung $S \colon E \to \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ so, dass für jedes $w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ gilt: $\mathrm{Num}_2(S(I(w))) = \mathrm{Num}_2(w)$.