Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 3

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 11. November 2015

Abgabe: 20. November 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 3:	/ 18	(Physik: 18)
Blätter 1 – 3:	/ 48	(Physik: 45)

Aufgabe 3.1 (2 + 4 = 6 Punkte)
Die Zahlen x_n, $n \in \mathbb{N}_0$, seien induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_+ \colon x_n &= n - x_{n-1}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Zahlenwerte von x_1, x_2, x_3 und x_4 an.
b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$x_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Lösung 3.1
a) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$.
b) *Induktionsanfang*: $x_0 = 0 = \frac{0}{2}$.
Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$x_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases} \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

Nach Definition von x_{n+1} im ersten Schritt, der Induktionsvoraussetzung im zweiten Schritt und elementarer Arithmetik in den folgenden Schritten gilt:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (n+1) - x_n \\ &= (n+1) - \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} (n+1) - \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ (n+1) - \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{n}{2} + 1, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{n+2}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(n+1)+1}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} \dfrac{(n+1)+1}{2}, & \text{falls } n+1 \text{ ungerade,} \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{falls } n+1 \text{ gerade,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{falls } n+1 \text{ gerade,} \\ \dfrac{(n+1)+1}{2}, & \text{falls } n+1 \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Schlussworte: Gemäß des Prinzips der vollständigen Induktion gilt zu beweisende Aussage.

Aufgabe 3.2 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

a) Es sei $w = \texttt{10011}$. Geben Sie $u = \mathrm{Num}_2(w)$ und $v = \mathrm{Num}_3(w)$ an.

b) Geben Sie $\mu = \mathrm{Repr}_3(285)$ und $\nu = \mathrm{Repr}_9(285)$ an.

c) Das Wort μ der vorangegangenen Teilaufgabe hat die Länge 6. Geben Sie $\xi = \mathrm{Repr}_9(\mathrm{Num}_3(\mu(0)\mu(1))) \cdot \mathrm{Repr}_9(\mathrm{Num}_3(\mu(2)\mu(3))) \cdot \mathrm{Repr}_9(\mathrm{Num}_3(\mu(4)\mu(5)))$ und $\zeta = \mathrm{Num}_9(\xi)$ an.
Erinnerung: Für jedes $i \in \mathbb{Z}_6$ ist $\mu(i)$ das i-te Zeichen des Wortes μ.

Lösung 3.2

a) $u = \mathrm{Num}_2(w) = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^4 = 1 + 2 + 16 = 19$
$v = \mathrm{Num}_3(w) = 1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^4 = 1 + 3 + 81 = 85$

b) $\mu = \texttt{101120}$
$\nu = \texttt{346}$

c) $\xi = \texttt{346} = \nu$
$\zeta = 285$

Aufgabe 3.3 (2 + 4 + 3 = 9 Punkte)

Die Abbildung I sei induktiv definiert durch

$$
\begin{aligned}
I \colon \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* &\to \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*, \\
\epsilon &\mapsto \texttt{1}, \\
w \cdot \texttt{0} &\mapsto w \cdot \texttt{1}, \text{ wobei } w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*, \\
w \cdot \texttt{1} &\mapsto I(w) \cdot \texttt{0}, \text{ wobei } w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*.
\end{aligned}
$$

a) Berechnen Sie $I(\epsilon)$, $I(I(\epsilon))$, $I(I(I(\epsilon)))$ und $I(I(I(I(\epsilon))))$.

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über die Wortlänge, dass für jedes $w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*$ gilt:

$$\text{Es gibt ein } i \in \mathbb{Z}_{|I(w)|} \text{ so, dass } (I(w))(i) = \texttt{1}.$$

Erinnerung: Für jedes $w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*$ und jedes $i \in \mathbb{Z}_{|I(w)|}$ ist $(I(w))(i)$ das i-te Zeichen des Wortes $I(w)$.

c) Es sei $E = \{u \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid \text{es gibt ein } i \in \mathbb{Z}_{|u|} \text{ so, dass } u(i) = \mathtt{1}\}$. Nach der vorangegangenen Teilaufgabe gilt $I(w) \in E$ für jedes $w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$. Definieren Sie induktiv eine Abbildung $S\colon E \to \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ so, dass für jedes $w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ gilt: $\mathrm{Num}_2(S(I(w))) = \mathrm{Num}_2(w)$.

Lösung 3.3

a) $I(\epsilon) = \mathtt{1}$
$I(I(\epsilon)) = I(\mathtt{1}) = I(\epsilon \cdot \mathtt{1}) = I(\epsilon) \cdot \mathtt{0} = \mathtt{1} \cdot \mathtt{0} = \mathtt{10}$
$I(I(I(\epsilon))) = I((10)) = I(\mathtt{1} \cdot \mathtt{0}) = \mathtt{1} \cdot \mathtt{1} = \mathtt{11}$
$I(I(I(I(\epsilon)))) = I(\mathtt{11}) = I(\mathtt{1} \cdot \mathtt{1}) = I(\mathtt{1}) \cdot \mathtt{0} = \mathtt{10} \cdot \mathtt{0} = \mathtt{100}$

b) Es ist zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Für jedes } w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^n \text{ gibt es ein } i \in \mathbb{Z}_{|I(w)|} \text{ so, dass } (I(w))(i) = \mathtt{1}.$$

Induktionsanfang: Es sei $w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^0$. Dann ist $w = \epsilon$. Foglich ist $I(w) = \mathtt{1}$. Also ist $(I(w))(0) = \mathtt{1}$.
Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^n \text{ gibt es ein } i \in \mathbb{Z}_{|I(u)|} \text{ so, dass } (I(u))(i) = \mathtt{1}. \quad \text{(I.V.)}$$

Weiter sei $w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^{n+1}$. Dann gibt es ein $u \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^n$ und ein $x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$ so, dass $u \cdot x = w$.

Fall 1: $x = \mathtt{0}$. Dann ist $I(w) = I(u \cdot x) = u \cdot \mathtt{1}$. Also ist $(I(w))(|w| - 1) = \mathtt{1}$.

Fall 2: $x = \mathtt{1}$. Dann ist $I(w) = I(u \cdot x) = I(u) \cdot \mathtt{0}$. Nach (I.V.) gibt es ein $i \in \mathbb{Z}_{|I(u)|}$ so, dass $(I(u))(i) = \mathtt{1}$. Also ist $(I(w))(i) = (I(u))(i) = \mathtt{1}$.

In jedem Fall gibt es ein $i \in \mathbb{Z}_{|I(w)|}$ so, dass $(I(w))(i) = \mathtt{1}$.
Schlussworte: Gemäß des Prinzips der vollständigen Induktion gilt zu beweisende Aussage.

c) Interpretiert man Wörter in $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ als Zahlen in Binärdarstellung, wobei man das leere Wort als die Zahl 0 interpretiert, so ist $I(w)$ die Summe von w und 1. Unter dieser Interpretation bedeutet $S(I(w)) = w$, dass $S(I(w))$ die Differenz von $I(w)$ und 1 ist. Die Abbildung S muss die „Transformationen“, die I vornimmt rückgängig machen, lax gesagt, müssen wir um die Definition von S zu erhalten die Pfeile der Form $\mapsto$ in der Definition von I umdrehen. Eine mögliche induktive Definition von S ist:

$$\begin{aligned} S\colon E &\to \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*, \\ \mathtt{1} &\mapsto \epsilon, \\ w \cdot \mathtt{1} &\mapsto w \cdot \mathtt{0}, \text{ wobei } w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^+, \\ w \cdot \mathtt{0} &\mapsto S(w) \cdot \mathtt{1}, \text{ wobei } w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*. \end{aligned}$$

Dies ist tatsächlich wohldefiniert, da der Definitionsbereich von S nur Wörter enthält in denen mindestens eine $\mathtt{1}$ vorkommt.