

# Grundbegriffe der Informatik

## Aufgabenblatt 4

Matr.nr.:

--	--	--	--	--	--	--

Nachname:

--

Vorname:

--

Tutorium:

Nr.

--

Name des Tutors:

--

Ausgabe: 18. November 2015

Abgabe: 27. November 2015, 12:30 Uhr  
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss  
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

---

*Vom Tutor auszufüllen:*

erreichte Punkte

Blatt 4:

	/ 18
--	------

(Physik: 18)

Blätter 1 – 4:

	/ 66
--	------

(Physik: 63)

---

**Aufgabe 4.1 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)**

Das Additionswerk der arithmetisch-logischen Einheit eines 8-Bit Prozessors realisiert eine Abbildung  $\text{add}_8: \mathbb{Z}_2^8 \times \mathbb{Z}_2^8 \rightarrow \mathbb{Z}_2^8$  mit der Eigenschaft, dass für jedes Wort  $u \in \mathbb{Z}_2^8$  und jedes Wort  $v \in \mathbb{Z}_2^8$  gilt:

$$\text{add}_8(u, v) = \text{bin}_8((\text{Num}_2(u) + \text{Num}_2(v)) \bmod 2^8).$$

- Geben Sie  $\text{Zkpl}_8(23)$  und  $\text{Zkpl}_8(-57)$  an.
- Geben Sie  $\text{Zkpl}_8(23 + (-57))$  und  $\text{add}_8(\text{Zkpl}_8(23), \text{Zkpl}_8(-57))$  an.
- Geben Sie ein Wort  $w \in \mathbb{Z}_2^*$  so an, dass  $\text{Num}_2(w) = \text{Num}_{16}(\text{B3C8})$ .

**Lösung 4.1**

- $\text{Zkpl}_8(23) = \text{bin}_8(23) = 00010111$   
 $\text{Zkpl}_8(-57) = \text{bin}_8(-57 + 2^8) = \text{bin}_8(-57 + 256) = \text{bin}_8(199) = 11000111$
- $\text{Zkpl}_8(23 + (-57)) = \text{Zkpl}_8(-34) = \text{bin}_8(-34 + 256) = \text{bin}_8(222) = 11011110$

$$\begin{aligned} & \text{add}_8(\text{Zkpl}_8(23), \text{Zkpl}_8(-57)) \\ &= \text{bin}_8(\text{Num}_2(\text{Zkpl}_8(23)) + \text{Num}_2(\text{Zkpl}_8(-57)) \bmod 2^8) \\ &= \text{bin}_8(\text{Num}_2(00010111) + \text{Num}_2(11000111) \bmod 256) \\ &= \text{bin}_8(23 + 199 \bmod 256) \\ &= \text{bin}_8(222 \bmod 256) \\ &= \text{bin}_8(222) \\ &= 11011110 \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt für alle ganzen Zahlen  $x, y \in \mathbb{K}_\ell$  mit  $x + y \in \mathbb{K}_\ell$ :

$$\text{Zkpl}_\ell(x + y) = \text{add}_\ell(\text{Zkpl}_\ell(x), \text{Zkpl}_\ell(y)).$$

Etwas ähnliches gilt auch ohne die Voraussetzung  $x + y \in \mathbb{K}_\ell$ . Das Additionswerk kann also unverändert zum Addieren von Zahlen in Zweierkomplementdarstellung verwendet werden.

- Das Wort  $w = \text{Trans}_{2,16}(\text{B3C8})$  hat die gewünschte Eigenschaft. Mit den Hinweisen aus der vierten Übung und der Einsicht das  $\text{Repr}_2(\text{num}_{16}(\text{B}))$  gerade  $\text{bin}_4(\text{num}_{16}(\text{B}))$  ohne führende Nullen ist, können wir  $\text{Trans}_{2,16}(\text{B3C8})$  wie folgt berechnen:  $\text{Trans}_{2,16}(\text{B3C8}) = \text{Repr}_2(\text{num}_{16}(\text{B})) \cdot \text{bin}_4(\text{num}_{16}(\text{3})) \cdot \text{bin}_4(\text{num}_{16}(\text{C})) \cdot \text{bin}_4(\text{num}_{16}(\text{8})) = 1011 \cdot 0011 \cdot 1100 \cdot 1000 = 1011001111001000$ .

**Aufgabe 4.2 (3 + 3 = 6 Punkte)**

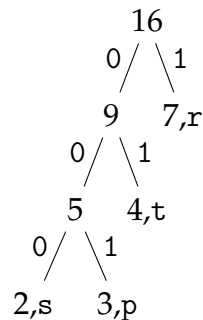
Es sei  $w$  das Wort  $\text{strrrprrrrstprprtt}$  über dem Alphabet  $\{r, s, t, p\}$ .

- Bestimmen Sie eine Huffman-Codierung des Wortes  $w$  anhand des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus.
- Bestimmen Sie eine Block-Codierung des Wortes  $w$  für Blöcke der Länge 2 anhand des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus.

**Lösung 4.2**

a) Schritt 1: Vorkommen zählen.  $\frac{r \quad s \quad t \quad p}{7 \quad 2 \quad 4 \quad 3}$

Schritt 2: Baum erstellen und beschriften.



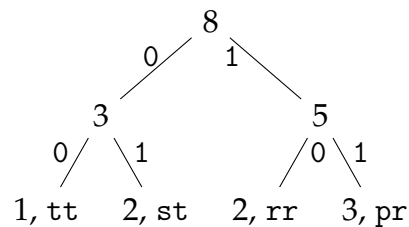
Schritt 3: Codierung einzelner Buchstaben ablesen.  $\frac{r \quad s \quad t \quad p}{1 \quad 000 \quad 01 \quad 001}$

Schritt 4: Wort codieren. 000011100111100001001100110101

b) Schritt 1: Wort in Blöcke der Länge 2 unterteilen. st rr pr rr st pr pr tt

Schritt 2: Vorkommen zählen.  $\frac{st \quad rr \quad pr \quad tt}{2 \quad 2 \quad 3 \quad 1}$

Schritt 3: Baum erstellen und beschriften.



Schritt 4: Codierung einzelner Buchstaben ablesen.  $\frac{st \quad rr \quad pr \quad tt}{01 \quad 10 \quad 11 \quad 00}$

Schritt 5: Wort codieren. 0110111001111100

### Aufgabe 4.3 (3 + 3 = 6 Punkte)

Für jedes  $i \in \mathbb{N}_0$  sei  $a_i$  ein Symbol so, dass für jedes  $k \in \mathbb{Z}_i$  gilt  $a_k \neq a_i$ . Weiter sei  $M$  die Menge  $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ .

a) Geben Sie für jedes  $k \in \mathbb{N}_+$  ein Alphabet  $A_k \subseteq M$  und ein Wort  $u_k \in A_k^*$  so an, dass jedes Symbol  $x \in A_k$  mindestens einmal in  $u_k$  vorkommt und für jede Huffman-Codierung  $h: A_k^* \rightarrow \{0,1\}^*$  von  $u_k$  gilt:

Für jedes  $x \in A_k$  gilt  $|h(x)| = k$ .

b) Geben Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}_+$  ein Alphabet  $B_n \subseteq M$  und ein Wort  $w_n \in B_n^*$  so an, dass jedes Symbol  $x \in B_n$  mindestens einmal in  $w_n$  vorkommt und für jede Huffman-Codierung  $h: B_n^* \rightarrow \{0,1\}^*$  von  $w_n$  gelten:

- Es gibt ein Symbol  $x \in B_n$  mit  $|h(x)| = 1$ ;
- Es gibt ein Symbol  $x \in B_n$  mit  $|h(x)| = n$ ;
- Für jedes Symbol  $x \in B_n$  gilt  $|h(x)| \in \{1, n\}$ .

### Lösung 4.3

- a) Es sei  $k \in \mathbb{N}_+$ . Weiter sei  $A_k$  die Menge  $\{a_i \in M \mid i \in \mathbb{Z}_{2^k}\}$  und es sei  $u_k$  das Wort

$$u_k: \mathbb{Z}_{2^k} \rightarrow A_k, \\ i \mapsto a_i.$$

Ferner sei  $h$  eine Huffman-Codierung von  $u_k$ . Dann gilt für jedes  $x \in A_k$ , dass  $|h(x)| = k$ .

- b) Es sei  $n \in \mathbb{N}_+$ . Weiter sei  $B_n$  die Menge  $\{a_i \in M \mid i \in \mathbb{Z}_{2^{n-1}+1}\}$  und es sei  $w_n$  das Wort

$$w_n: \mathbb{Z}_{2^n} \rightarrow B_n, \\ i \mapsto \begin{cases} a_i, & \text{falls } i \in \mathbb{Z}_{2^{n-1}}, \\ a_{2^{n-1}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner sei  $h$  eine Huffman-Codierung von  $w_n$ . Dann gelten  $a_{2^{n-1}} \in B_n$ ,  $|h(a_{2^{n-1}})| = 1$ ,  $a_0 \in B_n$ ,  $|h(a_0)| = n$  und für jedes  $x \in B_n$  gilt  $|h(x)| \in \{1, n\}$  (weil nämlich für sogar für jedes  $i \in \mathbb{Z}_{2^{n-1}}$  gilt:  $a_i \in B_n$  und  $|h(a_i)| = n$ ; vergleiche Teilaufgabe a) ).