Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 6

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.	Name des Tutors:

Ausgabe: 2. Dezember 2015

Abgabe: 11. Dezember 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 6:	/ 20	(Physik: 20)
Blätter 1 – 6:	/ 104	(Physik: 101)

Aufgabe 6.1 (2 + 2 + (2 + 1 + 1 + 2) + 2 + 2 = 14 Punkte)
Es sei A ein Alphabet; es sei $\mathcal{L}$ die Menge aller formalen Sprachen über A, das heißt, $\mathcal{L} = \{L \mid L \subseteq A^*\}$; es sei $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ eine Abbildung derart, dass für jede formale Sprache $S \in \mathcal{L}$ und jede formale Sprache $T \in \mathcal{L}$ mit $S \subseteq T$ gilt: $f(S) \subseteq f(T)$; es seien die formalen Sprachen L_n, $n \in \mathbb{N}_0$, induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} L_0 &= \{\}, \\ \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0\colon L_{n+1} &= f(L_n); \end{aligned}$$

und es sei L_∞ die formale Sprache $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} L_n$.

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $L_n \subseteq L_{n+1}$.

b) Beweisen Sie, dass $f(L_\infty) = L_\infty$ gilt. Eine formale Sprache mit dieser Eigenschaft nennt man *Fixpunkt von f*.
Hinweis: Für jede Menge I und alle formalen Sprachen $S_i \subseteq A^*$, $i \in I$, gilt $f(\bigcup_{i\in I} S_i) = \bigcup_{i\in I} f(S_i)$.

c) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und es sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{L} &\to \mathcal{L}, \\ L &\mapsto \{\mathtt{0},\mathtt{1}\} \cup (\{\mathtt{0},\mathtt{1}\} \cdot L). \end{aligned}$$

(i) Geben Sie L_1, $L_2 \setminus L_1$ und $L_3 \setminus L_2$ so explizit wie möglich in der Form $\{\dots\}$ an.

(ii) Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck E, in dem das Symbol n vorkommt und die Sprachen L_n, $n \in \mathbb{N}_0$, nicht vorkommen, so an, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $|L_{n+1} \setminus L_n| = E$.

(iii) Geben Sie L_∞ ohne Bezug auf die formalen Sprachen L_n, $n \in \mathbb{N}_0$, an.

(iv) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G so an, dass die von ihr erzeugte formale Sprache $L(G)$ gleich L_∞ ist.

d) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{;}\}$ und es sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{L} &\to \mathcal{L}, \\ L &\mapsto \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^+ \cup (\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^+ \cdot \{\mathtt{;}\} \cdot L). \end{aligned}$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G so an, dass $L(G) = L_\infty$ gilt.

e) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}$ und es sei $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$ die Grammatik mit den Nichtterminalsymbolen $N = \{\mathtt{S}\}$, den Terminalsymbolen $T = \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}$ und den Produktionen

$$P = \{\mathtt{S} \to \varepsilon \mid \mathtt{S(S)}\}.$$

Geben Sie eine Abbildung $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ so an, dass $L_\infty = L(G)$ gilt.

Lösung 6.1

Nebenbei: Jede Abbildung $g\colon A^* \to A^*$ induziert eine Abbildung $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ vermöge $L \mapsto g(L)$ mit der gewünschten Eigenschaft. Und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $L_n = f^n(\{\})$. Und $L_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(\{\})$. Und $f(L_\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f^{n+1}(\{\})$.

a) *Induktionsanfang:* Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge. Insbesondere gilt $L_0 = \{\} \subseteq f(\{\}) = L_1$.

   Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $L_n \subseteq L_{n+1}$. Dann gilt $L_{n+1} = f(L_n) \subseteq f(L_{n+1}) = L_{(n+1)+1}$.

   Schlussworte: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} f(L_\infty) = f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} L_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} f(L_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} L_{n+1} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} L_k \\ = \{\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} L_k = L_0 \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} L_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} L_k = L_\infty. \end{aligned}$$

c) (a) $L_1 \setminus L_0 = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, $L_2 \setminus L_1 = \{\mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{10}, \mathtt{11}\}$, $L_3 \setminus L_2 = \{\mathtt{000}, \mathtt{001}, \mathtt{010}, \mathtt{011}, \mathtt{100}, \mathtt{101}, \mathtt{110}, \mathtt{111}\}$.

   (b) $E = 2^{n+1}$.

   (c) $L_\infty = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^+$ oder $L_\infty = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\} \cdot \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ oder $L_\infty = \{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid |w| \geq 1\}$ oder ...

   (d) Die Grammatik $G = (N, T, \mathtt{B}, P)$ mit den Nichtterminalsymbolen $\{\mathtt{B}\}$, den Terminalsymbolen $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und den Produktionen $\{\mathtt{B} \to \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid \mathtt{0B} \mid \mathtt{1B}\}$ leistet das Gewünschte.

   Nebenbei: Für jedes $L \in \mathcal{L}$ gilt $f(L) = \{\mathtt{0}\} \cup \{\mathtt{1}\} \cup \{\mathtt{0}\} \cdot L \cup \{\mathtt{1}\} \cdot L$. Entfernt man aus diesem Ausdruck die Symbole $\{$, $\}$ und $\cdot$, ersetzt $\cup$ durch $|$, L durch $\mathtt{B}$, $=$ durch $\to$ und $f(L)$ durch $\mathtt{B}$, so erhält man die Produktionen in P.

d) Die Grammatik $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$ mit den Nichtterminalsymbolen $\{\mathtt{S}, \mathtt{B}\}$, den Terminalsymbolen $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{;}\}$ und den Produktionen

$$\begin{aligned} \{&\mathtt{S} \to \mathtt{B} \mid \mathtt{B;S}, \\ &\mathtt{B} \to \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid \mathtt{0B} \mid \mathtt{1B}\} \end{aligned}$$

leistet das Gewünschte.

e) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{L} &\to \mathcal{L}, \\ L &\mapsto \{\varepsilon\} \cup L \cdot \{\mathtt{(}\} \cdot L \cdot \{\mathtt{)}\}, \end{aligned}$$

leistet das Gewünschte.

Aufgabe 6.2 (2 + 4 = 6 Punkte)
Es sei $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$ die Grammatik mit den Nichtterminalsymbolen $N = \{\mathtt{S}, \mathtt{U}, \mathtt{X}, \mathtt{Q}\}$, den Terminalsymbolen $T = \{\mathtt{a}\}$ und den Produktionen

$$
\begin{aligned}
P = \{&\mathtt{S} \to \mathtt{aU} \mid \mathtt{aXa} \mid \mathtt{Qaa}, \\
&\mathtt{U} \to \mathtt{aaU} \mid \varepsilon, \\
&\mathtt{X} \to \mathtt{Qaaa} \mid \mathtt{a}, \\
&\mathtt{Q} \to \mathtt{aXa} \mid \mathtt{a}\}
\end{aligned}
$$

a) Leiten Sie aus dem Startsymbol das Wort $\mathtt{a}^7$ ab. Geben Sie dabei jeden Ableitungsschritt an.
b) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum für das Wort $\mathtt{a}^{16}$.

Lösung 6.2
Aus dem Nichtterminalsymbol $\mathtt{U}$ sind alle Wörter über T gerader Länge ableitbar. Somit sind aus $\mathtt{aU}$ alle Wörter über T ungerader Länge ableitbar. Aus den Nichtterminalsymbolen $\mathtt{X}$ und $\mathtt{Q}$ sind alle Wörter über T der Längen x_n beziehungsweise q_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ableitbar, wobei die nicht-negativen ganzen Zahlen x_n und q_n, $n \in \mathbb{N}_0$, wechselseitig induktiv definiert sind durch

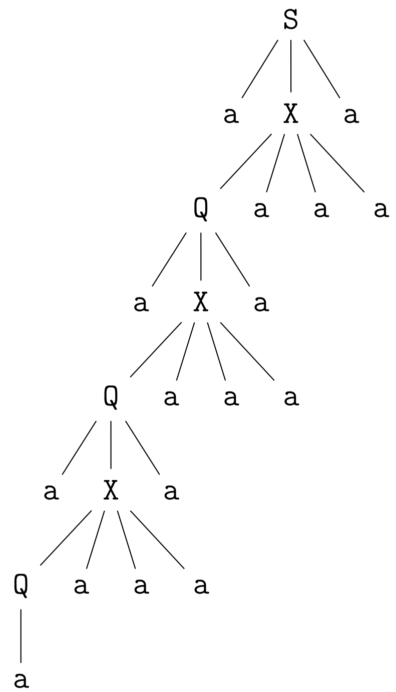
$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1, \\
q_0 &= 1, \\
\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0\colon \begin{cases} x_{n+1} = q_n + 3, \\ q_{n+1} = 1 + x_n + 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Somit sind aus $\mathtt{aXa}$ und $\mathtt{Qaa}$ alle Wörter über T der Längen $1 + x_n + 1$ beziehungsweise $q_n + 2$, $n \in \mathbb{N}_0$, ableitbar. Es gelten $x_0 = 1$, $q_0 = 1$, $x_1 = q_0 + 3 = 4$, $q_1 = 1 + x_0 + 1 = 3$, $x_2 = 6$, $q_2 = 6$, $x_3 = 9$, $q_3 = 8$, $x_4 = 11$, $q_4 = 11$, $x_5 = 14$, $q_5 = 13$.

a) Da das Wort ungerade Länge hat kann es über $\mathtt{aU}$ aus $\mathtt{S}$ wie folgt abgeleitet werden:

$$\mathtt{S} \Rightarrow \mathtt{aU} \Rightarrow \mathtt{aaaU} \Rightarrow \mathtt{aaaaaU} \Rightarrow \mathtt{aaaaaaaU} \Rightarrow \mathtt{aaaaaaa}.$$

b) Da das Wort gerade Länge hat, ist es nicht über $\mathtt{aU}$ aus $\mathtt{S}$ ableitbar. Da $1 + x_5 + 1 = 16$ gilt, ist das Wort über $\mathtt{aXa}$ aus $\mathtt{S}$ ableitbar.


S
a X a
Q a a a
a X a
Q a a a
a X a
Q a a a
a