Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
15. September 2016

Klausur-nummer

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Email-Adr.:

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	7	7	8	6	5	6	6
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	

Note:	

/ 7

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 7 Punkte)

/1

a) Geben Sie die Zweierkomplement-Darstellung der Zahl -1 mit 7 Bits an.

Antwort:

/1

b) Ein gerichteter Graph G enthalte zwei verschiedene Knoten x und y mit der Eigenschaft, dass es in G einen Pfad von x nach y gibt und auch einen Pfad von y nach x. Ist G stets streng zusammenhängend?

Antwort:

/1

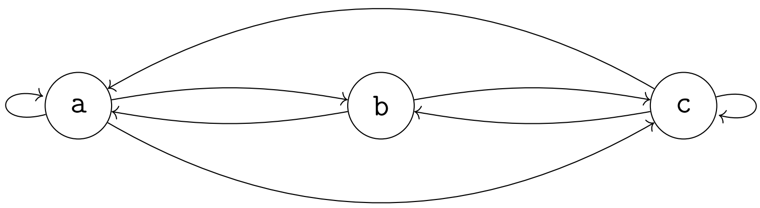
c) Ist $2^{(\sqrt{n})^2} \in O(n^3)$? Antwort:

/1

d) Ist $2^{2n} \in O(2^n)$? Antwort:

/2

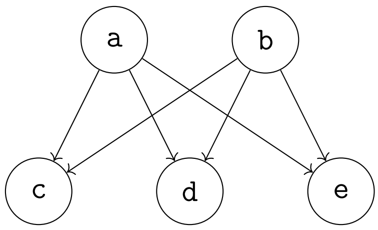
e) Ein Teilgraph H eines Graphen G heißt *aufspannender Baum von* G, wenn H ein Baum ist und dieselbe Knotenmenge wie G hat. Geben Sie graphisch einen aufspannenden Baum des folgenden Graphen an:

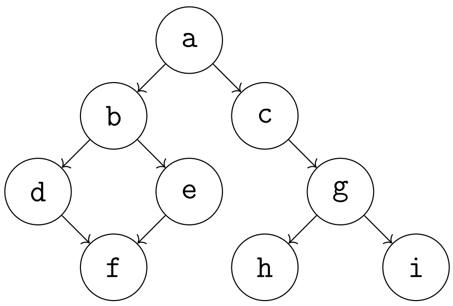


Antwort:

/1

f) Welche der zwei folgenden Graphen sind Bäume?





Antwort:

/ 7

Aufgabe 2 **(4 + 1 + 2 = 7 Punkte)**

Für ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}^*$ hat sich bei der Huffman-Codierung folgende Abbildung ergeben:

x	a	b	c	d	e
$h(x)$	01	0000	001	1	0001

/4

a) Zeichnen Sie einen Huffman-Baum (einschließlich aller Beschriftungen und Häufigkeiten), aus dem diese Codierung abgelesen werden kann.

/1

b) Zeichnen Sie einen Baum ohne Knoten- und Kantenbeschriftungen, der *niemals* als Struktur eines Huffman-Baumes entstehen kann.

/2

c) Geben Sie eine Bedingung an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass ein Baum die Struktur eines Huffman-Baumes sein kann.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

/ 8

Aufgabe 3 (3 + 2 + 3 = 8 Punkte)

Es sei A ein Alphabet, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei V_n die Menge $\bigcup_{i=0}^{n} A^i$, für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei $E_{n,k}$ die Menge

$$\{\ (v, w) \in V_n \times V_n \mid \big(v \text{ ist ein Präfix von } w\big) \text{ und } \big(|v| + 1 \leq |w|\big) \text{ und } \big(|w| \leq |v| + k\big)\ \}$$

und es sei $G_{n,k}$ der gerichtete Graph $(V_n, E_{n,k})$.

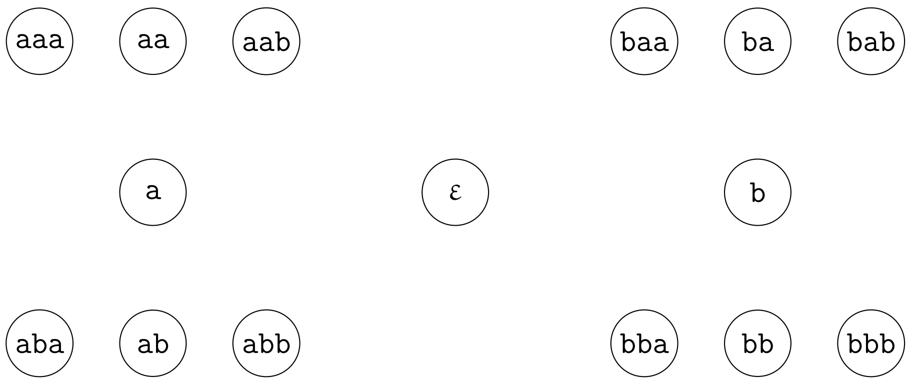
a) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

/1.5

(i) Zeichnen Sie die Graphen $G_{1,1}$, $G_{2,1}$ und $G_{3,1}$.

/1

(ii) Ergänzen Sie die folgende Zeichnung um die Kanten des Graphen $G_{3,2}$:



/0.5

(iii) Ist der Graph aus Teilaufgabe (ii) planar?

Hinweis: Ein Graph ist genau dann *planar*, wenn er so in der Ebene gezeichnet werden kann, dass sich keine Kanten kreuzen.

/2

b) Beweisen Sie, dass für jedes $(m, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und jedes $(n, k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ und $j \leq k$ der Graph $G_{m,j}$ ein Teilgraph von $G_{n,k}$ ist.

/3

c) Geben Sie jedes Tupel $(n, k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ an, für welches der Graph $G_{n,k}$ ein gerichteter Baum ist.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 6

Aufgabe 4 (1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Es sei L die formale Sprache aller nicht-leeren Wörter über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, deren erstes und letztes Symbol verschieden sind, das heißt,

$$L = \{\, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+ \mid w_0 \neq w_{|w|-1} \,\},$$

wobei für jedes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ und jedes $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$ der Ausdruck w_i das i-te Symbol von w bezeichne.

/1

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die die Sprache L erzeugt.

/1

b) Geben Sie für das Wort $\mathtt{aabab}$ einen Ableitungsbaum an, der zu Ihrer Grammatik aus Teilaufgabe a) passt.

/2

c) Geben Sie eine *rechtslineare* Grammatik G' an, die die Sprache L erzeugt.

/2

d) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl k_n der Wörter der Länge n an, die in L enthalten sind.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

/ 5

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Die Abbildung $\otimes\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei wie folgt induktiv definiert:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon k \otimes 0 = k,$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \ \ \forall \ell \in \mathbb{N}_0\colon k \otimes (\ell + 1) = (k \otimes \ell) + 1.$$

Beweisen Sie die folgende Aussage durch vollständige Induktion über z:

$$\forall x \in \mathbb{N}_0 \ \forall y \in \mathbb{N}_0 \ \forall z \in \mathbb{N}_0\colon (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

/ 6

Aufgabe 6 (2 + 1 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Auf einem Tisch stehen drei Kisten mit den Nummern 1, 2 und 3. Jede Kiste kann Gold enthalten oder leer sein. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ sei

G_i die Aussage „Die Kiste i enthält Gold."

Außerdem steht auf jeder Kiste i ($i \in \{1, 2, 3\}$) eine Nachricht N_i:

N_1: „In dieser Kiste ist kein Gold."
N_2: „In dieser Kiste ist kein Gold."
N_3: „In Kiste 2 ist Gold."

/2

a) Drücken Sie die Aussage

K_1: „In genau einer Kiste ist Gold, die beiden anderen sind leer."

durch eine aussagenlogische Formel mit den Variablen G_i aus.

/1

b) Drücken Sie jede der Nachrichten N_i durch eine aussagenlogische Formel mit den Variablen G_i aus.

N_1:

N_2:

N_3:

/2

c) Drücken Sie die Aussage

K_2 : „Genau eine der Nachrichten N_i ist wahr, die anderen sind falsch."

durch eine aussagenlogische Formel mit den Variablen G_i aus.

/1

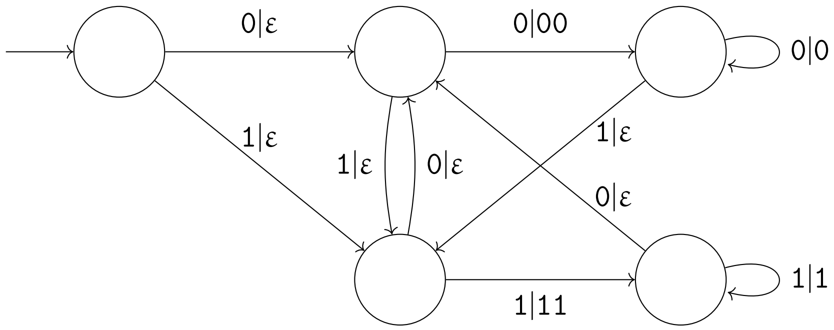
d) Geben Sie eine Belegung der Variablen G_i mit Wahrheitswerten an, für die die Aussagen K_1 aus Teilaufgabe a) und K_2 aus Teilaufgabe c) gleichzeitig wahr sind.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

/ 6

Aufgabe 7 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Es sei der nachfolgend dargestellte Mealy-Automat M mit Eingabealphabet $X = \{0, 1\}^*$ und Ausgabealphabet $Y = \{0, 1\}^*$ gegeben:



Es sei $g\colon Z \times X \to Y^*$ die Ausgabefunktion des Mealy-Automaten und es sei z_0 sein Anfangszustand.

/2

a) Welche „Gesamtausgabe“ $g_{**}(z_0, w)$ erzeugt der Automat für jede der folgenden Eingaben w:

- $w = 010$ $\qquad g_{**}(z_0, w) =$
- $w = 0110$ $\qquad g_{**}(z_0, w) =$
- $w = 0010111001$ $\qquad g_{**}(z_0, w) =$

/2

b) Für welche Eingaben $w \in X^*$ liefert der Automat als Ausgabe das leere Wort (also $g_{**}(z_0, w) = \varepsilon$)?

/2

c) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die formale Sprache

$$L = \{g_{**}(z_0, w) \mid w \in X^*\}$$

beschreibt, also die Menge aller Wörter, die der Automat als Ausgaben für beliebige Eingaben erzeugt.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: