# Klausur zur Vorlesung
# Grundbegriffe der Informatik
# 2. März 2016

**Klausur-nummer**

| | | |
|---|---|---|
| | | |

| |
|---|
| Nachname: |
| Vorname: |
| Matr.-Nr.: |

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

| | |
|---|---|
| Email-Adr.: | nur falls 2. Versuch |

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 8 | 7 | 4 | 7 | 5 | 6 | 7 |
| tats. Punkte | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Gesamtpunktzahl: | | | Note: | |

/ 8 **Aufgabe 1** **(1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 8 Punkte)**

/1

a) Gilt die folgende Gleichung für alle Mengen $A$, $B$ und $C$?

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Antwort:

/0.5

b) (i) Geben Sie eine formale Sprache $L_1$ an, für die $\varepsilon \in L_1^+$ ist.

/0.5

(ii) Geben Sie eine formale Sprache $L_2$ an, für die $\varepsilon \notin L_2^+$ ist.

/1

c) Ist die aussagenlogische Formel $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \wedge B) \to C\big)$ eine Tautologie? Antwort:

/1

d) Es sei $A$ ein Alphabet, es sei $n$ eine nicht-negative ganze Zahl und es sei $w \in A^*$ ein Wort der Länge $n$. Ein Wort $s \in A^*$ heißt genau dann *Suffix von* $w$, wenn ein Wort $u \in A^*$ existiert so, dass $u \cdot s = w$. Geben Sie die Anzahl der Suffixe von $w$ an. Antwort:

/2

e) Ein gerichteter Baum heißt genau dann *ternär*, wenn jeder innere Knoten den Ausgangsgrad 3 hat. Die Höhe eines Baumes ist die größte Länge eines Pfades von der Wurzel zu einem Blatt. Geben Sie die minimale und die maximale Anzahl von Blättern eines ternären Baums der Höhe $k \in \mathbb{N}_0$ an.

minimal: maximal:

/1

f) Geben Sie eine Eigenschaft an, die die folgenden drei schlingenfreien gerichteten Graphen gemeinsam haben (und die in diesem Satz nicht schon erwähnt wurde): Antwort:

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ C \arrow[rr, bend right] & D \arrow[r] & E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[dl] \\ H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P & Q \arrow[l] \arrow[dl] \\ R & S \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

/1

g) Geben Sie die Anzahl der Kanten des *ungerichteten* Graphen an, der die folgende Adjazenzmatrix hat: Antwort:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:*

/ 7

## Aufgabe 2 (1.5 + 1.5 + 1 + 3 = 7 Punkte)

Es bezeichne $Z$ das Alphabet $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Für jedes $w \in Z^+$ sei $\mathbf{lt}(w)$ das Wort all jener Symbole in $w$ die echt kleiner als das erste Symbol von $w$ sind, wenn man die Symbole in naheliegender Weise als Zahlen interpretiert. Z. B. sei $\mathbf{lt}(4136425) = 132$. Außerdem sei $\mathbf{lt}(\varepsilon) = \varepsilon$.

Analog sei $\mathbf{eq}(w)$ das Wort all jener Symbole in $w$ die gleich dem ersten Symbol von $w$ sind. Z. B. sei $\mathbf{eq}(4136425) = 44$. Außerdem sei $\mathbf{eq}(\varepsilon) = \varepsilon$.

Schließlich sei $\mathbf{gt}(w)$ das Wort all jener Symbole in $w$ die echt größer als das erste Symbol von $w$ sind, wenn man die Symbole in naheliegender Weise als Zahlen interpretiert. Z. B. sei $\mathbf{gt}(4136425) = 65$. Außerdem sei $\mathbf{gt}(\varepsilon) = \varepsilon$.

Eine Abbildung $F\colon Z^* \to Z^*$ sei für alle Wörter $w \in Z^*$ wie folgt definiert:

$$F(w) = \begin{cases} w, & \text{falls } |w| \leq 1 \\ F(\mathbf{lt}(w)) \cdot \mathbf{eq}(w) \cdot F(\mathbf{gt}(w)) & \text{sonst} \end{cases}$$

/1.5

a) Geben Sie $\mathbf{lt}(208319)$, $\mathbf{eq}(208319)$ und $\mathbf{gt}(208319)$ an.

/1.5

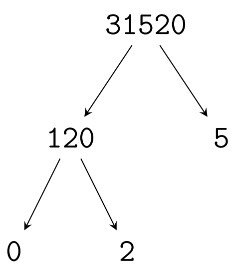
b) Berechnen Sie $F(208319)$ an.

/1

c) Beschreiben Sie mit einem Wort was $F$ bewirkt.

d) Jeder Berechung eines Wertes $F(w)$ entspricht wie folgt einen knotenmarkierten gerichteten Baum: Die Wurzel des Baumes ist $w$. Von einem Knoten $u$ verläuft genau dann eine Kante zu einem Knoten $v$, wenn $v = \mathbf{lt}(u) \neq \varepsilon$ oder $v = \mathbf{gt}(u) \neq \varepsilon$ ist.

Zum Beispiel ergibt sich für $F(31520)$ der Baum




/1

(i) Geben Sie ein Wort $w$ der Länge 7 so an, dass der zu $F(w)$ gehörende Baum die maximale Höhe 6 hat.

/2

(ii) Ein gerichteter Baum heißt genau dann *balanciert*, wenn alle Pfade von der Wurzel zu den Blättern gleich lang sind. Geben Sie ein Wort $w$ der Länge 7 so an, dass der zu $\mathsf{F}(w)$ gehörende Baum balanciert ist.

/ 4

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{N}_{\geq 2}$ die Menge $\mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$. Beweisen Sie die folgende Aussage durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \colon \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$$

Die Schreibweise $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} a_k$ steht dabei für das Produkt aller Ausdrücke $a_k$, es ist also

$$\prod_{k=2}^{2} a_k = a_2 \quad ,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} : \prod_{k=2}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=2}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}$$

*Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:*

/ 7 **Aufgabe 4 (2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7 Punkte)**

Es sei $G_0$ der Graph mit Knotenmenge $V_0 = \{(0,0)\}$ und Kantenmenge $E_0 = \{\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien die Graphen $G_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1})$ induktiv definiert vermöge der Festlegungen

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V_n \cup \{\, (n+1, i) \mid 0 \leq i \leq n+1 \,\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \\ E_{n+1} &= E_n \cup \{\, ((n,i),(n+1,i)) \mid 0 \leq i \leq n \,\} \\ &\quad\ \cup \{\, ((n,i),(n+1,i+1)) \mid 0 \leq i \leq n \,\} \end{aligned}$$

/2 a) Zeichnen Sie $G_0$, $G_1$ and $G_2$ und schreiben Sie in jeden Knoten ein passendes Zahlenpaar $(x, y) \in V_i$, für $i \in \{0, 1, 2\}$.

/1 b) Ist $G_2$ streng zusammenhängend?

/0.5 c) (i) Wieviele Zeilen hat die Adjazenzmatrix von $G_3$?

/0.5 (ii) Wieviele Spalten hat die Adjazenzmatrix von $G_3$?

/1 d) Es sei $n \geq 2$. Enthält der Graph $G_n$ einen Teilgraphen $H_n = (V_n, B_n)$ mit gleicher Knotenmenge $V_n$ und Kantenmenge $B_n \subseteq E_n$ so, dass $H_n$ ein Baum ist?

/2 e)

(i) Falls Ihre Antwort in Teilaufgabe d) „ja“ ist:
Geben Sie eine induktive Definition für die Mengen $B_n$ an:
Geben explizit $B_2$ an und wie sich für $n \geq 2$ aus $B_n$ die Menge $B_{n+1}$ ergibt.

(ii) Falls Ihre Antwort in Teilaufgabe d) „nein“ ist:
Beweisen Sie, dass kein solcher Teilgraph existiert.

*Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:*

/ 5

## Aufgabe 5 (3 + 1 + 1 = 5 Punkte)

In dieser Aufgabe bedeutet wie in der Vorlesung $N_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Symbols $x$ im Wort $w$.

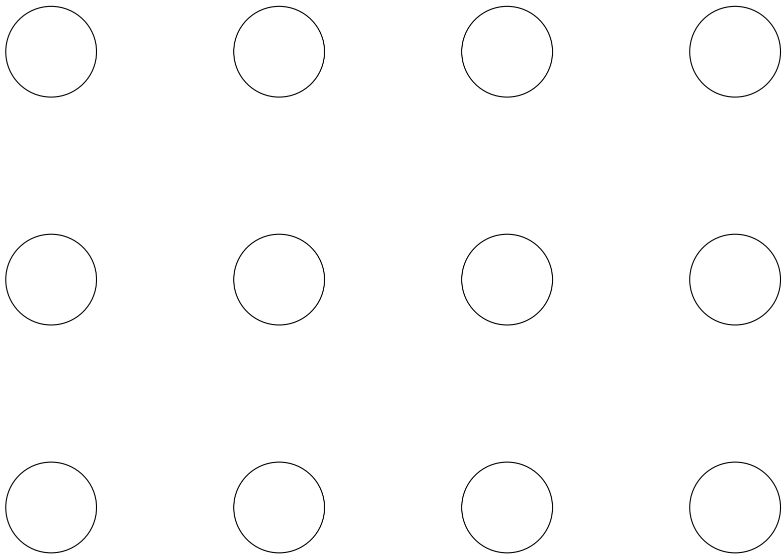
/3

a) Ergänzen Sie die unten stehende Abbildung zum Zustandsübergangsdiagramm eines endlichen Akzeptors mit Eingabealphabet $X = \{a, b\}$, der die formale Sprache

$$L_1 = \left\{ w \in X^* \;\middle|\; (N_a(w) \geq 3) \wedge (N_b(w) \geq 2) \right\}$$

akzeptiert. Sie dürfen keine Zustände hinzufügen.

Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, wie in der Vorlesung „Grundbegriffe der Informatik“ eingeführt. (Für diejenigen, die schon anderweitig etwas über endliche Automaten gelernt haben: Der Automat muss deterministisch, vollständig und ohne $\varepsilon$-Übergänge sein.)



/1

b) Ist die formale Sprache

$$L_2 = \left\{ w \in X^* \;\middle|\; (N_a(w) \geq 2) \wedge (N_a(w) \leq 5) \wedge \big((N_b(w) \leq 4) \vee (N_b(w) \geq 6)\big) \right\}$$

regulär? Antwort:

/1

c) Ist die formale Sprache

$$L_3 = \left\{ w \in X^* \;\middle|\; N_a(w) + N_b(w) \leq 4 \right\}$$

regulär? Antwort:

*Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:*

/ 6

**Aufgabe 6 (2 + 1 + 3 = 6 Punkte)**

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$ mit der Produktionenmenge

$$\begin{aligned} P = \{\ & S \longrightarrow ASB \mid A \mid B\ , \\ & A \longrightarrow Aa \mid \varepsilon\ , \\ & B \longrightarrow bB \mid \varepsilon \quad \} \end{aligned}$$

/2

a) Geben Sie zwei verschiedene Ableitungsbäume der Grammatik für das Wort aab an.

/1

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die von $G$ erzeugte Sprache $L(G)$ beschreibt.

/3

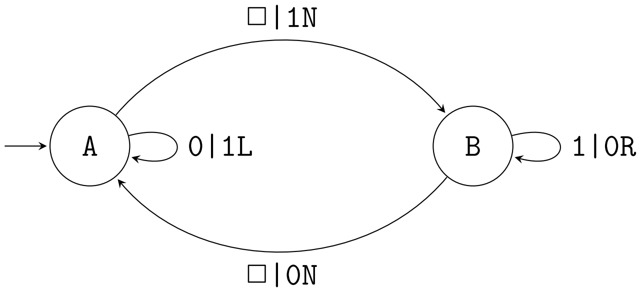
c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G'$ an, die die Sprache $(L(G))^*$ erzeugt.

*Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:*

/ 7

## Aufgabe 7 (2.5 + (1.5 + 1) + 2 = 7 Punkte)

Die Turingmaschine T sei graphisch gegeben durch




Dabei bedeuten `L` und `R`, dass der Kopf nach links bzw. rechts bewegt wird und `N`, dass er nicht bewegt wird.

/2.5

a) Geben Sie die ersten elf Konfigurationen an, die die Turingmaschine T durchläuft, wenn zu Beginn alle Felder mit dem Blanksymbol beschriftet sind.

Nutzen Sie dazu die Raster auf der Folgeseite. Notieren Sie die Bandbeschriftung jeweils nur für den Teil des Bandes, der *keine* Blanksymbole enthält.

b) Für jede nicht-negative ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\varphi(n)$ die Anzahl der Schritte, die die Turingmaschine T bei Eingabe $\varepsilon$ benötigt, bis das Wort $0^{2n}$ auf dem Band steht.

/1.5

(i) Geben Sie $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ und $\varphi(2)$ an.

$\varphi(0)$: $\boxed{\phantom{xx}}$ $\varphi(1)$: $\boxed{\phantom{xx}}$ $\varphi(2)$: $\boxed{\phantom{xx}}$

/1

(ii) Vervollständigen Sie die Rekursionsformel

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \boxed{\phantom{xxxxxx}}$$

durch einen arithmetischen Ausdruck, in dem $n$ vorkommt.

/2

c) Geben Sie eine Abbildung $\psi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ so an, dass $\varphi \in \Theta(\psi)$ gilt.

Dazu dürfen Sie *keine* trigonometrischen Funktionen (cos, sin, usw.) verwenden.

*Platz für Antworten zu Aufgabe 7a):*
Schreiben Sie jeweils in die untere Zeile eines Kastens die Bandbeschriftung und in die obere über dem aktuell besuchten Feld den Zustand. Füllen Sie erst die linke Spalte, danach die rechte. Die Anfangskonfiguration ist angegeben. Es steht mehr Platz zur Verfügung als nötig.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | | | |
| | | | | | |

*Platz für Antworten zu Aufgabe 7:*