Lösungsvorschläge und Erläuterungen

Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
2. März 2016

Klausur-nummer			

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Email-Adr.:

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	8	7	4	7	5	6	7
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:			Note:	

/ 8 **Aufgabe 1** **(1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 8 Punkte)**

/1 a) Gilt die folgende Gleichung für alle Mengen A, B und C?

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Antwort: Ja

/0.5 b) (i) Geben Sie eine formale Sprache L_1 an, für die $\varepsilon \in L_1^+$ ist.

$L_1 = \{\varepsilon\}$

/0.5 (ii) Geben Sie eine formale Sprache L_2 an, für die $\varepsilon \notin L_2^+$ ist.

$L_1 = \{\ \}$

/1 c) Ist die aussagenlogische Formel $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \wedge B) \to C\big)$ eine Tautologie? Antwort: Ja

/1 d) Es sei A ein Alphabet, es sei n eine nicht-negative ganze Zahl und es sei $w \in A^*$ ein Wort der Länge n. Ein Wort $s \in A^*$ heißt genau dann *Suffix von* w, wenn ein Wort $u \in A^*$ existiert so, dass $u \cdot s = w$. Geben Sie die Anzahl der Suffixe von w an. Antwort: $n + 1$

/2 e) Ein gerichteter Baum heißt genau dann *ternär*, wenn jeder innere Knoten den Ausgangsgrad 3 hat. Die Höhe eines Baumes ist die größte Länge eines Pfades von der Wurzel zu einem Blatt. Geben Sie die minimale und die maximale Anzahl von Blättern eines ternären Baums der Höhe $k \in \mathbb{N}_0$ an.

minimal: $2k + 1$ maximal: 3^k

/1 f) Geben Sie eine Eigenschaft an, die die folgenden drei schlingenfreien gerichteten Graphen gemeinsam haben (und die in diesem Satz nicht schon erwähnt wurde): Antwort:

azyklisch

$$\begin{tikzcd}
A & B \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
C \arrow[rr, bend right] & D \arrow[r] & E
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[dl] \\
H &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P & Q \arrow[l] \arrow[dl] \\
R & S \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

/1 g) Geben Sie die Anzahl der Kanten des *ungerichteten* Graphen an, der die folgende Adjazenzmatrix hat: Antwort:

4

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterungen:

a) Ja, da für jedes x gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) &\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cap C \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \vee x \notin C) \\ &\leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \\ &\leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

Schnell sieht man die Gleichung auch anhand eines Venn-Diagramms ein.

b) (i) Jede formale Sprache, die das leere Wort ε enthält, leistet das Gewünschte, z. B. $L_1 = \{\varepsilon\}$.

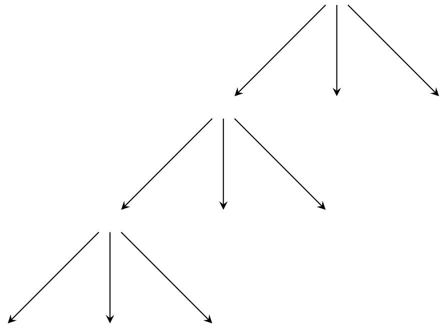
(ii) Jede formale Sprache, die das leere Wort ε *nicht* enthält, leistet das Gewünschte, z. B. $L_2 = \{\}$.

c) Ja, da im Falle das $A \to (B \to C)$ wahr ist und außerdem $A \wedge B$ wahr ist, aus der Wahrheit von A und jener von $A \to (B \to C)$ die Wahrheit von $B \to C$ folgt, und aus der Wahrheit von B und jener von $B \to C$ die Wahrheit von C folgt.

d) Die Anzahl der Suffixe von w ist $n+1$. Die Suffixe sind nämlich ε, $w(0)$, $w(0)w(1)$, $\ldots$, $w(0)w(1)\cdots w(n-1) = w$.

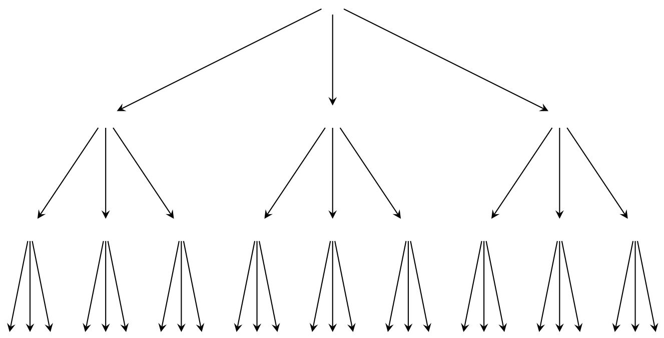
e) Die minimale Anzahl beträgt $2(k-1)+3 = 2k+1$ und die maximale Anzahl beträgt 3^k.

Die Anzahl der Blätter ist minimal, wenn der Baum so wenig balanciert ist als möglich, also von folgender Gestalt:



Auf den Ebenen $0, 1, \ldots, k-1$ hat der Baum jeweils 2 Blätter und auf der untersten Ebene k genau 3 Blätter.

Die Anzahl der Blätter ist maximal, wenn der Baum balanciert ist, also von folgender Gestalt:



Der Baum hat nur auf der untersten Ebene Blätter und dort 3^k viele.

f) Alle drei Graphen sind beispielsweise *azyklisch*.

g) Die Anzahl der Kanten ist gerade die Anzahl der 1-Einträge auf der Diagonalen (Schlingen) und jener unterhalb (oder oberhalb) der Diagonalen, nämlich 4. Für jene Kanten die keine Schlingen sind gibt es zwei 1-Einträge in der Matrix, einen unterhalb der Diagonalen und einen oberhalb. Beispielsweise stehen die zwei 1en in der zweiten Zeile und ersten Spalte und in der ersten Zeile und zweiten Spalte für dieselbe Kante.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

/ 7

Aufgabe 2 (1.5 + 1.5 + 1 + 3 = 7 Punkte)

Es bezeichne Z das Alphabet $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Für jedes $w \in Z^+$ sei $\mathbf{lt}(w)$ das Wort all jener Symbole in w die echt kleiner als das erste Symbol von w sind, wenn man die Symbole in naheliegender Weise als Zahlen interpretiert. Z. B. sei $\mathbf{lt}(4136425) = 132$. Außerdem sei $\mathbf{lt}(\varepsilon) = \varepsilon$.

Analog sei $\mathbf{eq}(w)$ das Wort all jener Symbole in w die gleich dem ersten Symbol von w sind. Z. B. sei $\mathbf{eq}(4136425) = 44$. Außerdem sei $\mathbf{eq}(\varepsilon) = \varepsilon$.

Schließlich sei $\mathbf{gt}(w)$ das Wort all jener Symbole in w die echt größer als das erste Symbol von w sind, wenn man die Symbole in naheliegender Weise als Zahlen interpretiert. Z. B. sei $\mathbf{gt}(4136425) = 65$. Außerdem sei $\mathbf{gt}(\varepsilon) = \varepsilon$.

Eine Abbildung $F\colon Z^* \to Z^*$ sei für alle Wörter $w \in Z^*$ wie folgt definiert:

$$F(w) = \begin{cases} w, & \text{falls } |w| \leq 1 \\ F(\mathbf{lt}(w)) \cdot \mathbf{eq}(w) \cdot F(\mathbf{gt}(w)) & \text{sonst} \end{cases}$$

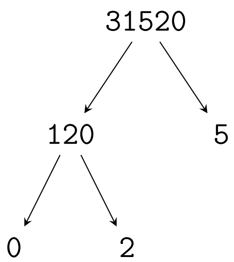
/1.5 a) Geben Sie $\mathbf{lt}(208319)$, $\mathbf{eq}(208319)$ und $\mathbf{gt}(208319)$ an.

/1.5 b) Berechnen Sie $F(208319)$ an. 012389

/1 c) Beschreiben Sie mit einem Wort was F bewirkt. Sortieren

d) Jeder Berechung eines Wertes $F(w)$ entspricht wie folgt einen knotenmarkierten gerichteten Baum: Die Wurzel des Baumes ist w. Von einem Knoten u verläuft genau dann eine Kante zu einem Knoten v, wenn $v = \mathbf{lt}(u) \neq \varepsilon$ oder $v = \mathbf{gt}(u) \neq \varepsilon$ ist.

Zum Beispiel ergibt sich für $F(31520)$ der Baum



/1 (i) Geben Sie ein Wort w der Länge 7 so an, dass der zu $F(w)$ gehörende Baum die maximale Höhe 6 hat.

/2 (ii) Ein gerichteter Baum heißt genau dann *balanciert*, wenn alle Pfade von der Wurzel zu den Blättern gleich lang sind. Geben Sie ein Wort w der Länge 7 so an, dass der zu $F(w)$ gehörende Baum balanciert ist.

Lösung 2

a) $\mathbf{lt}(208319) = 01$, $\mathbf{eq}(208319) = 2$ und $\mathbf{gt}(208319) = 839$

b) Es ist

$$\begin{aligned} F(208319) &= F(01) \cdot 2 \cdot F(839) \\ &= \big(F(\varepsilon) \cdot 0 \cdot F(1)\big) \cdot 2 \cdot \big(F(3) \cdot 8 \cdot F(9)\big) \\ &= (\varepsilon \cdot 0 \cdot 1) \cdot 2 \cdot (3 \cdot 8 \cdot 9) \\ &= 012389. \end{aligned}$$

c) Sortieren

d) (i) Jede abfallende Ziffernfolge ist korrekt, z. B. 7654321. Der zugehörige Baum ist

$$\begin{tikzcd} 7654321 \arrow[d] \\ 654321 \arrow[d] \\ 54321 \arrow[d] \\ 4321 \arrow[d] \\ 321 \arrow[d] \\ 21 \arrow[d] \\ 1 \end{tikzcd}$$

Weitere Lösungen: 7654312, 7654301, und viele mehr.

(ii) 5213768 ist eine Möglichkeit. Der zugehörige Baum ist

$$\begin{tikzcd} & & & 5213768 \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\ & 213 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & 768 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 1 & & 3 & & 6 & & 8 \end{tikzcd}$$

Weitere Lösungen: 7654321, 1111111, 2111333, 0101010, 4555555, 444455555, und viele mehr.

/ 4 **Aufgabe 3** **(4 Punkte)**

Es sei $\mathbb{N}_{\geq 2}$ die Menge $\mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$. Beweisen Sie die folgende Aussage durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\colon \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$$

Die Schreibweise $\prod\limits_{k=2}^{n} a_k$ steht dabei für das Produkt aller Ausdrücke a_k, es ist also

$$\prod_{k=2}^{2} a_k = a_2 \quad ,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} : \prod_{k=2}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=2}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}$$

Lösung 3

Induktionsanfang: Es gilt

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ derart, dass

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}. \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 7 **Aufgabe 4** **(2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7 Punkte)**

Es sei G_0 der Graph mit Knotenmenge $V_0 = \{(0,0)\}$ und Kantenmenge $E_0 = \{\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien die Graphen $G_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1})$ induktiv definiert vermöge der Festlegungen

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V_n \cup \{\, (n+1, i) \mid 0 \le i \le n+1 \,\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \\ E_{n+1} &= E_n \cup \{\, ((n,i),(n+1,i)) \mid 0 \le i \le n \,\} \\ &\quad \cup \{\, ((n,i),(n+1,i+1)) \mid 0 \le i \le n \,\} \end{aligned}$$

/2 a) Zeichnen Sie G_0, G_1 and G_2 und schreiben Sie in jeden Knoten ein passendes Zahlenpaar $(x,y) \in V_i$, für $i \in \{0,1,2\}$.

/1 b) Ist G_2 streng zusammenhängend? Nein

/0.5 c) (i) Wieviele Zeilen hat die Adjazenzmatrix von G_3? 10

/0.5 (ii) Wieviele Spalten hat die Adjazenzmatrix von G_3? 10

/1 d) Es sei $n \ge 2$. Enthält der Graph G_n einen Teilgraphen $H_n = (V_n, B_n)$ mit gleicher Knotenmenge V_n und Kantenmenge $B_n \subseteq E_n$ so, dass H_n ein Baum ist? Ja

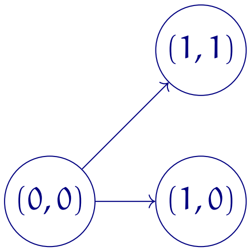
/2 e)

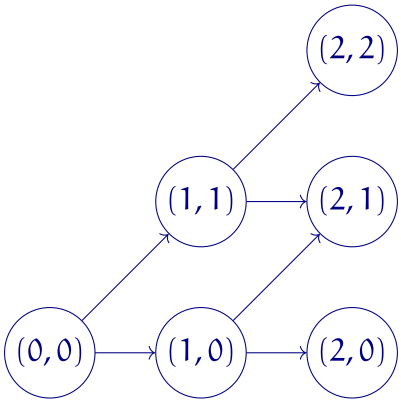
(i) Falls Ihre Antwort in Teilaufgabe d) „ja" ist:
Geben Sie eine induktive Definition für die Mengen B_n an:
Geben explizit B_2 an und wie sich für $n \ge 2$ aus B_n die Menge B_{n+1} ergibt.

(ii) Falls Ihre Antwort in Teilaufgabe d) „nein" ist:
Beweisen Sie, dass kein solcher Teilgraph existiert.

Lösung 4

a)
- G_0: 

- G_1: 

- G_2: 

b) (siehe vorne)

c) (siehe vorne)

d) (siehe vorne)

e) Eine Möglichkeit ist es all jene Kanten in den Baum zu nehmen, die in den oben gezeichneten Graphen horizontal verlaufen, sowie die Kanten, die von $(0,0)$ aus diagonal „nach oben“:

$$
\begin{aligned}
B_2 &= E_2 \setminus \{\, \big((1,0),(2,1)\big) \,\},\\
\forall n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}\colon B_{n+1} &= B_n \cup \{\, \big((n,i),(n+1,i)\big) \mid 0 \leq i \leq n \,\}\\
&\quad \cup \{\, \big((n,n),(n+1,n+1)\big) \,\}\,.
\end{aligned}
$$

Erläuterungen:

a)

b) Nein. Beispielsweise ist der Knoten $(0,0)$ nicht von Knoten $(1,1)$ erreichbar.

c) Die Anzahl der Zeilen und die Anzahl der Spalten der Adjazenzmatrix ist gleich der Anzahl der Knoten des Graphen.

Da die Mengen V_k, für $k \in \mathbb{N}_0$, paarweise disjunkt sind (das heißt $V_i \cap V_j = \{\}$ für $i \neq j$), gilt für die Anzahl der Knoten von G_{n+1}:

$$\begin{aligned}
|V_{n+1}| &= |V_n| + ((n+1)+1) \\
&= |V_{n-1}| + (n+1) + ((n+1)+1) \\
&= \cdots \\
&= |V_0| + \sum_{k=1}^{n+1}(k+1) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1}(k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(k+1).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $|V_3| = \sum_{k=0}^{3}(k+1) = 1+2+3+4 = 10$. Somit hat die Adjazenzmatrix von G_3 10 Zeilen und 10 Spalten.

d)

e) Eine weitere Möglichkeit ist es all jene Kanten in den Baum zu nehmen, die von $(0,0)$ aus „horizontal" Ebene verlaufen (also jene zwischen Knoten deren zweite Komponente den Wert 0 hat) und all jene, die von einer zu einer anderen Ebene verlaufen. Die Kantenmengen B_k, für $k \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$, sind dann induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned}
B_2 &= E_2 \setminus \{\, \big((1,1),(2,1)\big) \,\}, \\
\forall n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}\colon B_{n+1} &= B_n \cup \{\, \big((n,0),(n+1,0)\big) \,\} \\
&\quad \cup \{\, \big((n,i),(n+1,i+1)\big) \mid 0 \leq i \leq n \,\}.
\end{aligned}$$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

/ 5

Aufgabe 5 **(3 + 1 + 1 = 5 Punkte)**

In dieser Aufgabe bedeutet wie in der Vorlesung $N_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Symbols x im Wort w.

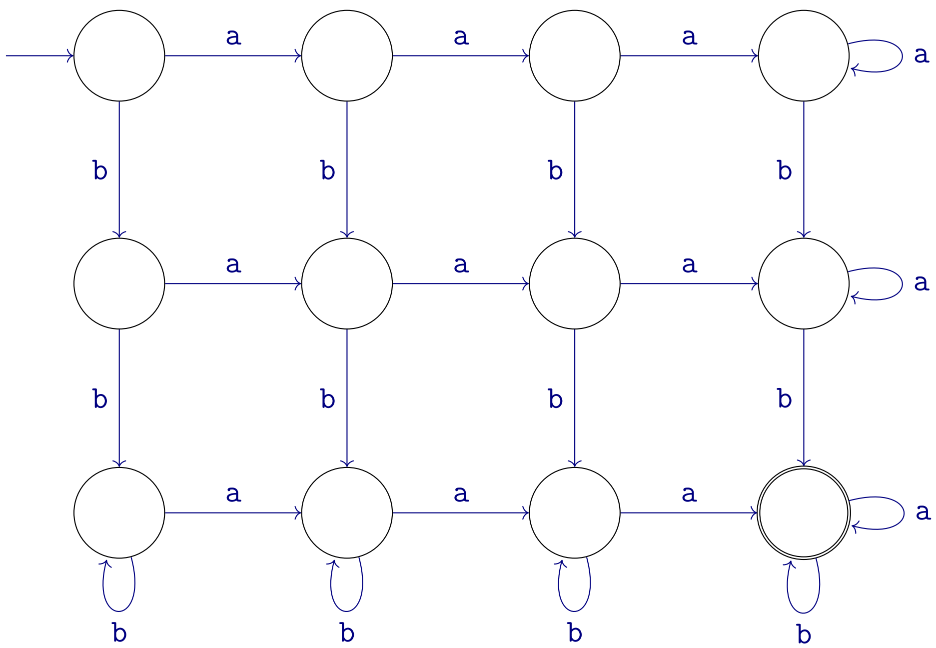
/3

a) Ergänzen Sie die unten stehende Abbildung zum Zustandsübergangsdiagramm eines endlichen Akzeptors mit Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, der die formale Sprache

$$L_1 = \left\{ w \in X^* \;\middle|\; (N_{\mathtt{a}}(w) \geq 3) \wedge (N_{\mathtt{b}}(w) \geq 2) \right\}$$

akzeptiert. Sie dürfen keine Zustände hinzufügen.

Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, wie in der Vorlesung „Grundbegriffe der Informatik“ eingeführt. (Für diejenigen, die schon anderweitig etwas über endliche Automaten gelernt haben: Der Automat muss deterministisch, vollständig und ohne ε-Übergänge sein.)



/1

b) Ist die formale Sprache

$$L_2 = \left\{ w \in X^* \;\middle|\; (N_{\mathtt{a}}(w) \geq 2) \wedge (N_{\mathtt{a}}(w) \leq 5) \wedge \big((N_{\mathtt{b}}(w) \leq 4) \vee (N_{\mathtt{b}}(w) \geq 6)\big) \right\}$$

regulär? Antwort: Ja

/1

c) Ist die formale Sprache

$$L_3 = \left\{ w \in X^* \;\middle|\; N_{\mathtt{a}}(w) + N_{\mathtt{b}}(w) \leq 4 \right\}$$

regulär? Antwort: Ja

Erläuterungen:

a) Für $j \in \{0, 1, 2\}$, befindet sich der endliche Akzeptor bei der Verarbeitung einer Eingabe genau dann in einem Knoten in der j-ten Spalte, wenn bisher genau j-mal das Zeichen $\mathtt{a}$ vorkam und in einem Knoten der 3-ten Spalte, wenn bisher mindestens 3-mal das Zeichen $\mathtt{a}$ vorkam. Für $i \in \{0, 1\}$, befindet sich der Akzeptor genau dann in einem Knoten in der i-ten Zeile, wenn bisher genau i-mal das Zeichen $\mathtt{b}$ vorkam und in einem Knoten der 2-ten Zeile, wenn bisher mindestens 2-mal das Zeichen $\mathtt{b}$ vorkam. Im einzigen akzeptierenden Zustand in der letzten Spalte und letzten Zeile befindet sich der Akzeptor nach Abarbeitung einer Eingabe genau dann, wenn in der Eingabe mindestens 3-mal das Zeichen $\mathtt{a}$ und mindestens 2-mal das Zeichen $\mathtt{b}$ vorkam.

b) Ja: man kann einen endlichen Akzeptor konstruieren analog zum vorne gezeigten. Die Wahl der akzeptierenden Zustände muss natürlich angepasst werden.

c) Ja: Da das Alphabet X nur die Zeichen $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ enthält, besteht jedes Wort $w \in X^*$ lediglich aus diesen Zeichen. In L_3 ist die Summe der Vorkommen dieser Zeichen durch 4 nach oben beschränkt. Somit besteht L_3 aus allen Wörtern über X die höchstens die Länge 4 haben. Insbesondere ist L_3 endlich. Schreibt man alle Wörter aus L_3 getrennt durch $\mathtt{|}$ nebeneinander, so erhält man einen regulären Ausdruck, der L_3 beschreibt.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

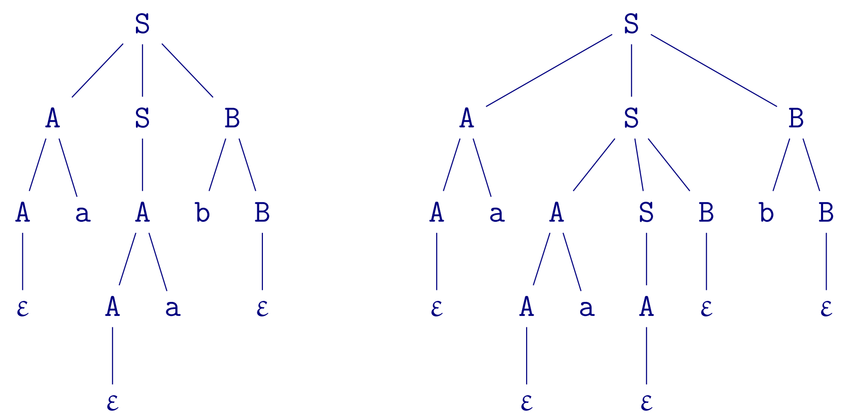
/ 6

Aufgabe 6 (2 + 1 + 3 = 6 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{\mathtt{S}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{S}, P)$ mit der Produktionenmenge

$$P = \{\ \mathtt{S} \to \mathtt{ASB} \mid \mathtt{A} \mid \mathtt{B}\ ,\quad \mathtt{A} \to \mathtt{Aa} \mid \varepsilon\ ,\quad \mathtt{B} \to \mathtt{bB} \mid \varepsilon\ \}$$

a) Geben Sie zwei verschiedene Ableitungsbäume der Grammatik für das Wort aab an. /2



b) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die von G erzeugte Sprache L(G) beschreibt. /1

a*b*

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G' an, die die Sprache $(L(G))^*$ erzeugt. /3

$G' = (\{\mathtt{S}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{S}, \{\mathtt{S} \to \mathtt{aS} \mid \mathtt{bS} \mid \varepsilon\})$

Erläuterungen:

a) es gibt noch andere Möglichkeiten …

b) Aus dem Nichtterminalsymbol $\mathtt{A}$ sind die Wörter in $\langle \mathtt{a*} \rangle$ ableitbar und aus $\mathtt{B}$ jene in $\langle \mathtt{b*} \rangle$. Somit sind aus $\mathtt{S}$ gerade die Wörter in $\langle \mathtt{a*b*} \rangle$ ableitbar. Deswegen beschreibt $\mathtt{a*b*}$ die von G erzeugte Sprache. Aber es gibt noch andere äquivalente reguläre Ausdrücke …

c) Es gibt mehrere naheliegende Möglichkeiten. Da $(L(G))^* = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ ist, ist die vorne angegebene Grammatik eine „naheliegende direkte“ Konstruktion.

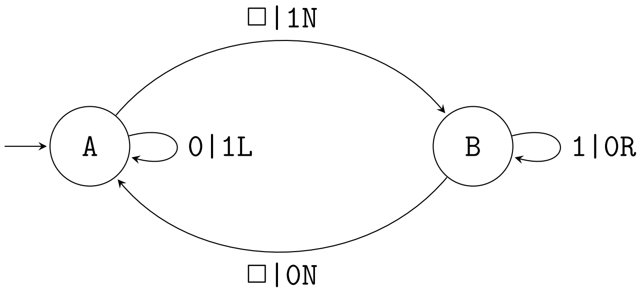
   Aber man kann auch G „erweitern“:
   $G' = (\{\mathtt{R}, \mathtt{S}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \mathtt{R}, \{\, \mathtt{R} \to \mathtt{RS} \mid \varepsilon \,\} \cup P)$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

/ 7

Aufgabe 7 **(2.5 + (1.5 + 1) + 2 = 7 Punkte)**

Die Turingmaschine T sei graphisch gegeben durch



Dabei bedeuten `L` und `R`, dass der Kopf nach links bzw. rechts bewegt wird und `N`, dass er nicht bewegt wird.

/2.5

a) Geben Sie die ersten elf Konfigurationen an, die die Turingmaschine T durchläuft, wenn zu Beginn alle Felder mit dem Blanksymbol beschriftet sind.

Nutzen Sie dazu die Raster auf der Folgeseite. Notieren Sie die Bandbeschriftung jeweils nur für den Teil des Bandes, der *keine* Blanksymbole enthält.

b) Für jede nicht-negative ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\varphi(n)$ die Anzahl der Schritte, die die Turingmaschine T bei Eingabe ε benötigt, bis das Wort 0^{2n} auf dem Band steht.

/1.5

(i) Geben Sie $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ und $\varphi(2)$ an.

$\varphi(0)$: $\boxed{0}$ $\varphi(1)$: $\boxed{3}$ $\varphi(2)$: $\boxed{10}$

/1

(ii) Vervollständigen Sie die Rekursionsformel

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \boxed{4n+3}$$

durch einen arithmetischen Ausdruck, in dem n vorkommt.

/2

c) Geben Sie eine Abbildung $\psi \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ so an, dass $\varphi \in \Theta(\psi)$ gilt.

Dazu dürfen Sie *keine* trigonometrischen Funktionen (cos, sin, usw.) verwenden.

$\psi : n \mapsto n^2$

Lösung 7

a)

		A			

		B			
		1			

			B		
		0			

			A		
		0	0		

		A			
		0	1		

	A				
		1	1		

	B				
	1	1	1		

		B			
	0	1	1		

			B		
	0	0	1		

				B	
	0	0	0		

				A	
	0	0	0	0	

Erläuterungen:

a) (siehe oben)

b) Ein Wort der Gestalt 0^{2n} steht stets genau dann auf dem Band, wenn sich die Turingmaschine in Zustand A befindet und der Kopf auf dem letzten Zeichen, das kein Blanksymbol ist. Ist die Turingmaschine in einer solchen Konfiguration mit 0^{2n} auf dem Band, so benötigt sie $4n + 3$ Schritte bis $0^{2(n+1)}$ auf dem Band steht, da die Turingmaschine zunächst in $2n$ Schritten zum Blanksymbol vor dem ersten Nicht-Blanksymbol läuft und dabei aus jeder 0 eine 1 macht, dann in einem Schritt eine 1 schreibt und in Zustand B übergeht, dann in $2n + 1$ Schritten zum Blanksymbol nach dem letzten Nicht-Blanksymbol läuft und dabei aus jeder 1 eine 0 macht, und schließlich in einem Schritt eine 0 schreibt und in Zustand A übergeht. Damit ergeben sich die Lösungen:

(i) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 3$, $\varphi(2) = 10$

(ii) $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$

Knapp an den Lösungen vorbei sind

(i) $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 4$, $\varphi(2) = 11$

(ii) $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n - 1$

c) Eine mögliche Lösung ist $\psi\colon n \mapsto n^2$. Tatsächlich tut es jede Funktion in $\Theta(n \mapsto n^2)$. Die Funktion ψ darf auch als Summe angegeben werden, z. B. $\psi\colon n \mapsto \sum_{k=0}^{n}(4k + 3)$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(n+1) &= \sum_{k=0}^{n}(4k+3)\\ &= 4 \cdot \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 3\\ &= 4 \cdot \sum_{k=0}^{n} k + 3(n+1).\end{aligned}$$

Aus Vorlesung und Übung ist bekannt, dass $[n \mapsto \sum_{k=0}^{n} k] \in \Theta(n \mapsto (n+1)^2)$ gilt. Folglich gilt $\varphi \in \Theta(n \mapsto 4 \cdot n^2 + 3n) = \Theta(n \mapsto n^2)$.

Platz für Antworten zu Aufgabe 7a):
Schreiben Sie jeweils in die untere Zeile eines Kastens die Bandbeschriftung und in die obere über dem aktuell besuchten Feld den Zustand. Füllen Sie erst die linke Spalte, danach die rechte. Die Anfangskonfiguration ist angegeben. Es steht mehr Platz zur Verfügung als nötig.

A

Platz für Antworten zu Aufgabe 7: