

**Lösungsvorschläge und Erläuterungen**  
**Klausur zur Vorlesung**  
**Grundbegriffe der Informatik**  
**19. März 2019**

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Diese Klausur ist mein  1. Versuch  2. Versuch in GBI

nur falls 2. Versuch:

Email-Adr.:
Postanschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	8	5	7	7	5	6	6
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 44
------------------	------

Note:	
-------	--



/ 8

**Aufgabe 1 (2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 8 Punkte)**

/ 2

a) Ist  $\sqrt{2^n 3^n} \in \Omega(2^n)$ ? Begründen Sie Ihre Antwort:

Ja, denn  $\sqrt{2^n 3^n} \geq \sqrt{2^n 2^n} = 2^n \in \Omega(2^n)$ .

/ 1

b) Ist die folgende Aussage richtig? Für jede Turing-Maschine  $T$  ist die Sprache  $L(T)$  genau dann entscheidbar, wenn  $T$  für jede Eingabe hält.

ja:       nein:

/ 2

c) Es sei  $A = \{a, b\}$ . Geben Sie eine Sprache  $L \subseteq A^*$  an, sodass  $L^* = A^*$  aber  $(L^2)^* \neq (A^2)^*$  ist.

$L = \{\varepsilon, a, b\}$

/ 1

d) Es sei  $M$  eine Menge und  $R$  eine binäre Relation auf  $M$  (also  $R \subseteq M \times M$ ), die transitiv ist. Ist  $R \circ R$  dann auch immer transitiv?

ja:       nein:

/ 1

e) Beschreiben Sie mit einem regulären Ausdruck  $R$  die formale Sprache aller Wörter über dem Alphabet  $A = \{a, b\}$ , die die Eigenschaft haben, dass an keiner Stelle ein  $a$  vorkommt, wenn sowohl irgendwo weiter links als auch irgendwo weiter rechts ein  $b$  steht.

$R = a^* b^* a^*$

/ 1

f) Gibt es einen Graphen  $G = (V, E)$ , der zwar azyklisch aber kein Baum ist? Falls ja, geben Sie einen solchen Graphen an; andernfalls begründen Sie, warum das nicht sein kann.

Antwort:

Es gibt viele Möglichkeiten; z.B.:



/ 5

**Aufgabe 2 (1 + 1 + 3 = 5 Punkte)**

Es sei  $A = \{a, b\}$  ein Alphabet und eine Abbildung  $f: A^* \times A^* \rightarrow A^*$  wie folgt definiert:

$$\forall w \in A^* : f(w, \varepsilon) = \varepsilon$$

$$\forall w \in A^* : f(\varepsilon, w) = \varepsilon$$

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad \forall w_1, w_2 \in A^* : f(x_1 w_1, x_2 w_2) = \begin{cases} x_1 f(w_1, w_2) & \text{falls } x_1 = x_2 \\ \varepsilon & \text{falls } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

/ 1

a) Berechnen Sie schrittweise  $f(\text{abb}, \text{abaa})$ .

$$f(\text{abb}, \text{abaa}) = af(\text{bb}, \text{baa}) = abf(\text{b}, \text{aa}) = ab\varepsilon = ab$$

/ 1

b) Beschreiben Sie anschaulich präzise  $f(w_1, w_2)$ .

das längste gemeinsame Präfix von  $w_1$  und  $w_2$

/ 3

c) Beweisen Sie induktiv, dass für jedes  $w_1 \in A^*$  gilt: Für jedes  $w_2 \in A^*$  ist  $f(w_1, w_2)$  ein Präfix von  $w_1$ .

**Lösung 2**

Durch vollständige Induktion über  $n = |w_1| \in \mathbb{N}_0$ :

- **IA.**  $n = 0$ . Dann ist  $|w_1| = 0$ , also  $w_1 = \varepsilon$ . Für jedes  $w_2 \in A^*$  gilt  $f(w_1, w_2) = f(\varepsilon, w_2) = \varepsilon$ , was Präfix von  $w_1 = \varepsilon$  ist.
- **IS.** Es gelte die Behauptung für alle Wörter der Länge kleiner gleich  $n$ , wobei  $n$  fest ist. (IV) Es sei dann ein Wort  $w_1 \in A^*$  der Länge  $|w_1| = n + 1$  gegeben sowie  $w_2 \in A^*$  beliebig. Ist  $w_2 = \varepsilon$ , so ist  $f(w_1, w_2) = \varepsilon$  Präfix von  $w_1$ ; es sei also  $w_2 \neq \varepsilon$ .

Seien  $x_1, x_2 \in A$  sowie  $w'_1, w'_2 \in A^*$  mit  $w_i = x_i w'_i$  für  $i \in \{1, 2\}$  gegeben; es folgt insbesondere  $|w'_1| = n$ . Wenn  $x_1 \neq x_2$ , so ist  $f(w_1, w_2) = \varepsilon$  und damit Präfix von  $w_1$ ; es sei also  $x_1 = x_2$ .

Dann gilt  $f(w_1, w_2) = f(x_1 w'_1, x_2 w'_2) = x_1 f(w'_1, w'_2)$  und nach IV (da  $|w'_1| = n$ ) ist  $f(w'_1, w'_2)$  Präfix von  $w'_1$ . Damit ist  $f(w_1, w_2) = x_1 f(w'_1, w'_2)$  Präfix von  $x_1 w'_1 = w_1$ .

---

*Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:*

/ 7

**Aufgabe 3 (4 + 1 + 2 = 7 Punkte)**

- a) Gegeben sei das Alphabet  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  und ein Wort  $w \in A^*$  in dem die Symbole mit folgenden Häufigkeiten vorkommen:

a	b	c	d	e	f	g
11	6	11	27	9	2	34

/ 4

- (i) Zeichnen Sie den Huffman-Baum.

/ 1

- (ii) Geben Sie die Huffman-Codierung des Wortes bad an, die sich aus Ihrem Huffman-Baum ergibt.

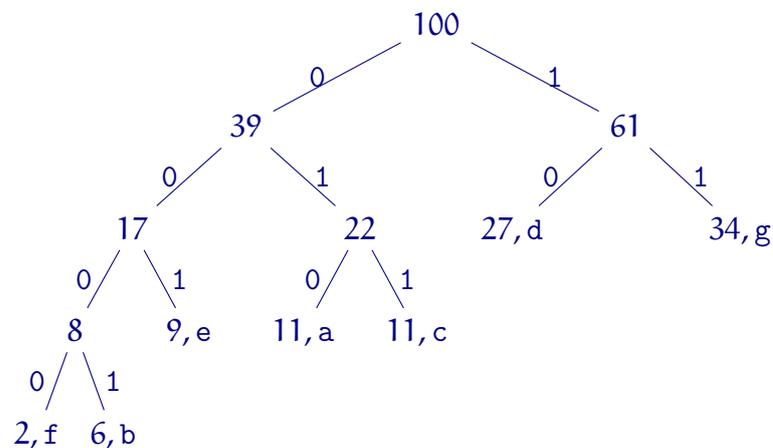
/ 2

- b) Für  $k \geq 2$  sei ein Alphabet  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$  mit  $k$  Symbolen gegeben und ein Text, in dem jedes Symbol  $a_i$  mit Häufigkeit  $2^i$  vorkommt für  $0 \leq i < k$ .

Geben Sie die Huffman-Codierungen aller Symbole  $a_i$  an.

**Lösung 3**

- a) (i)



- (ii) 0001 010 10

- b)  $a_0 = 0^{k-1}$  und  $a_i = 0^{k-i-1}1$  für  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ .

---

*Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:*

/ 7

**Aufgabe 4 (2 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)**

Es sei  $A = \{0, 1\}$  ein Alphabet. Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  sei  $V_n = A^n$  sowie  $E_n$  die Menge

$$\{ \{w_1, w_2\} \mid w_1, w_2 \in V_n \text{ und } \exists i, j \in \mathbb{Z}_n : (i \neq j \wedge \forall k \in \mathbb{Z}_n : (k \notin \{i, j\} \leftrightarrow w_1(k) = w_2(k))) \}$$

und es sei  $G_n$  der ungerichtete Graph  $(V_n, E_n)$ .

/ 2

a) Zeichnen Sie  $G_n$  für  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Beschriften Sie alle Knoten.

/ 1

b) Geben Sie die Adjazenzmatrix  $A_2$  und die Wegematrix  $W_2$  von  $G_2$  an. Geben Sie bei  $A_2$  für jede Zeile und Spalte an, welchem Knoten sie entspricht.

/ 2

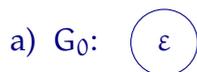
c) *(In der Originalklausur war an dieser Stelle die Formulierung einer unlösbaren Aufgabe. Für das Archiv der alten Klausuren zum Lernen wurde diese Teilaufgabe entfernt.)*

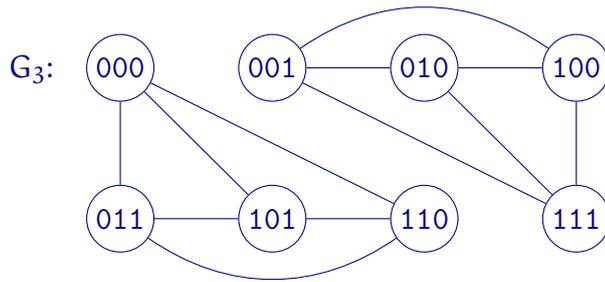
/ 2

d) Zeigen oder widerlegen Sie:  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (E_n)_g = ((E_n)_g)^*$ .

*Hinweis.*  $((E_n)_g)^*$  bezeichnet die reflexiv-transitive Hülle der Relation  $(E_n)_g$ .

**Lösung 4**





b) Adjazenzmatrix:

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} & 00 & 01 & 10 & 11 \\
 00 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\
 01 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\
 10 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\
 11 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Wegematrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) —

d) Interpretiert man die Aussage als  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (E_n)_g = ((E_n)_g)^*$ , so ist sie **falsch**.

Es gibt mehrere Begründungen, u.a.:

- $(E_n)_g$  ist nicht reflexiv (und zwar für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$ ).
- Für  $n = 4$  ist  $(E_n)_g$  nicht transitiv:  $\{0000, 0011\} \in E_n$  und  $\{0011, 1111\} \in E_n$ , aber  $\{0000, 1111\} \notin E_n$ .

$((E_n)_g)^*$  ist damit nicht reflexiv bzw. für  $n \geq 4$  nicht transitiv, also kann es nicht gleich der reflexiv-transitiven Hülle  $((E_n)_g)^*$  sein.

/ 5

**Aufgabe 5 (2 + 1 + 2 = 5 Punkte)**

Es sei das Alphabet  $X = \{a, b\}$  gegeben. Betrachten Sie die Grammatiken  $G_1 = (\{S_1, A_1\}, X, S_1, P_1)$  und  $G_2 = (\{S_2, A_2, B_2\}, X, S_2, P_2)$  mit

$$P_1 = \{ S_1 \rightarrow aaS_1 \mid bA_1 \mid \varepsilon, \quad \text{und} \quad P_2 = \{ S_2 \rightarrow S_2S_2 \mid A_2B_2, \\ A_1 \rightarrow aS_1 \mid b \} \quad \quad \quad A_2 \rightarrow ab, \\ B_2 \rightarrow baS_2 \mid \varepsilon \}$$

/ 2

- a) Geben Sie zu  $G_i$  jeweils einen regulären Ausdruck  $R_i$  an (wobei  $i \in \{1, 2\}$ ), sodass  $\langle R_i \rangle = L(G_i)$  ist.

$$R_1 = (aa|ba)^*(\emptyset^*|bb)$$

$$R_2 = (ab|abba)^*ab$$

*Hinweis.* Sie dürfen die üblichen Klammereinsparungsregeln ausnutzen. Aber beschränken Sie sich ansonsten auf die Notationsmöglichkeiten aus der Definition regulärer Ausdrücke und benutzen Sie keine Abkürzungen wie  $a^+$ .

/ 1

- b) Die Grammatik  $G_1$  ist rechtslinear, die Grammatik  $G_2$  nicht.

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik  $G_3 = (N_3, X, S_3, P_3)$  mit höchstens 3 Nichtterminalsymbolen (also  $|N_3| \leq 3$ ) an, sodass  $L(G_3) = L(G_2)$  ist.

/ 2

- c) Geben Sie eine Grammatik  $G_4 = (N_4, X, S_4, P_4)$  an, die die Sprache  $L(G_4) = L(G_1) \cup L(G_2)$  erzeugt. Ihre Grammatik darf höchstens 4 Nichtterminalsymbole haben (also  $|N_4| \leq 4$ ).

**Lösung 5**

- b)  $N_3 = \{S_3\}$  und

$$P_3 = \{ S_3 \rightarrow abbaS_3 \mid abS_3 \mid ab \}$$

- c)  $N_4 = \{S_1, S_3, S_4\}$  und

$$P_4 = \{ S_4 \rightarrow S_1 \mid S_3, \\ S_1 \rightarrow aaS_1 \mid baS_1 \mid bb \mid \varepsilon, \\ S_3 \rightarrow abbaS_3 \mid abS_3 \mid ab \}$$

---

*Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:*

/ 6

**Aufgabe 6 (2 + 1 + 3 = 6 Punkte)**

Es sei das Alphabet  $X = \{a, b\}$  und die formale Sprache

$$L = \{w \in X^* \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : N_b(w) = 3k + 1\}$$

gegeben.

$N_b(w)$  bezeichne dabei die Anzahl der Vorkommen des Zeichens  $b$  in  $w$ .

/ 2

- a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der  $L$  erkennt.

Es sei jetzt  $A$  ein beliebiger endlicher Akzeptor mit Zustandsmenge  $Z$  und dessen Eingabealphabet gleich  $X$  ist, und für den  $L(A) = L$  gilt.

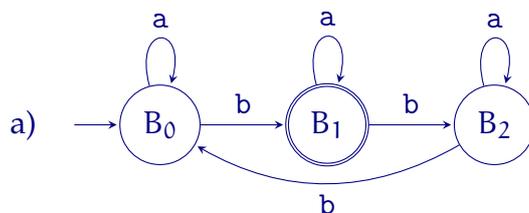
/ 1

- b) Zeigen Sie, dass  $|Z| \neq 1$  ist.

/ 3

- c) Zeigen Sie, dass  $|Z| \neq 2$  ist.

*Hinweis.* Führen Sie einen Widerspruchsbeweis durch. Sie dürfen dabei annehmen, dass Teilaufgabe b) schon bewiesen worden ist.

**Lösung 6**

- b) Sei  $|Z| = 1$ . Also ist  $Z = \{s\}$  und  $s$  ist der Startzustand von  $A$ .

Für die Zustandsüberföhrungsfunktion  $f: Z \times X \rightarrow Z$  muss  $f(s, a) = f(s, b) = s$  gelten. Folglich, wenn  $s$  akzeptierend ist, dann ist  $L(A) = X^*$ ; wenn  $s$  nicht akzeptierend ist, so gilt  $L(A) = \emptyset$ .

Es gilt aber  $L \neq \emptyset$  (da bspw.  $b \in L$ ) und  $L \neq X^*$  (da bspw.  $\varepsilon \notin L$ ).

- c) Sei  $|Z| = 2$ . Wir nehmen an, dass  $L = L(A)$  ist.

Es sei wie vorher  $s \in Z$  der Startzustand von  $A$  sowie  $Z = \{s, q\}$  und  $f: Z \times X \rightarrow Z$  die Zustandsüberföhrungsfunktion von  $A$ . Ferner sei  $F$  die Menge akzeptierender Zustände von  $A$ .

Wenn  $|F| = 0$ , so ist  $L(A) = \emptyset \neq L$ . Wenn  $|F| = 2$ , dann ist  $L(A) = X^*$ . Wie in Teilaufgabe b) ist weder das eine noch das andere möglich. Es folgt damit  $|F| = 1$ .

---

Da  $\varepsilon \notin L$ , so gilt  $s \notin F$ , d.h.  $q$  ist der (einzige) akzeptierende Zustand.

Da  $b \in L$  aber  $s \notin F$ , so ist  $f(s, b) = q$ .

Ferner, da  $bb \notin L$ , so gilt  $f_*(s, bb) = f(q, b) = s$ .

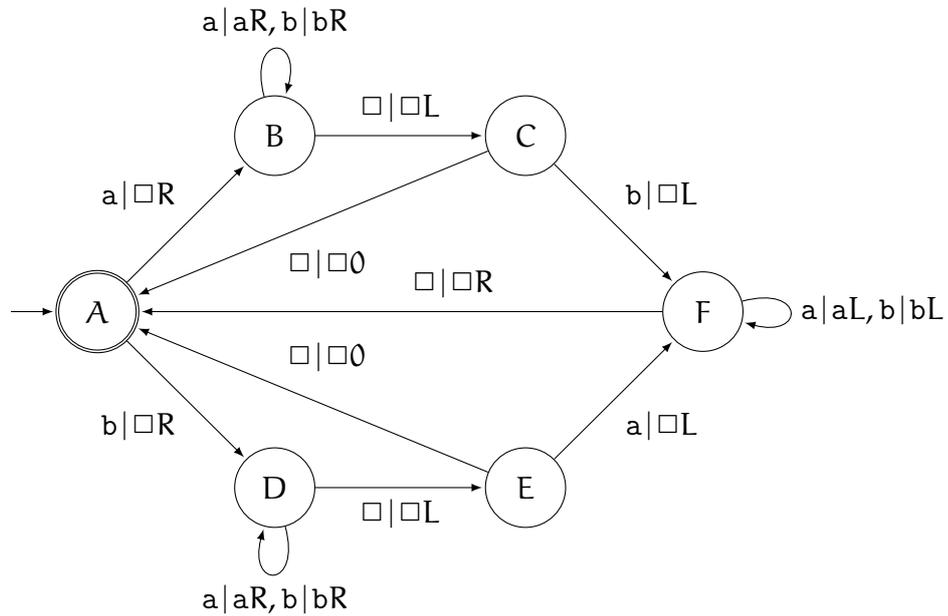
Es gilt aber dann:

$$f_*(s, bbb) = f_*(q, bb) = f_*(s, b) = q$$

Es folgt  $bbb \in L(A)$  aber  $bbb \notin L$ . Widerspruch!

**Aufgabe 7 (3 + 1 + 2 = 6 Punkte)**

Betrachten Sie folgende Turing-Maschine  $T$  mit Eingabealphabet  $\{a, b\}$ :



- a) Simulieren Sie die ersten 14 Schritte von  $T$  für das Eingabewort  $w = abab$ . Vervollständigen Sie dazu folgende Tabelle:

Schritt	Konfiguration	Schritt	Konfiguration
0	A □ a b a b □	7	F □ □ b a □ □
1	B □ □ b a b □	8	F □ □ b a □ □
2	B □ □ b a b □	9	A □ □ b a □ □
3	B □ □ b a b □	10	D □ □ □ a □ □
4	B □ □ b a b □	11	D □ □ □ a □ □
5	C □ □ b a b □	12	E □ □ □ a □ □
6	F □ □ b a □ □	13	F □ □ □ □ □ □
		14	A □ □ □ □ □ □

/ 1

- b) Geben Sie Funktionen  $f, g: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$  an, sodass für die Zeitkomplexität  $\text{Time}_T: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$  und Platzkomplexität  $\text{Space}_T: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$  von  $T$  gilt:  $\text{Time}_T \in \Theta(f)$  und  $\text{Space}_T \in \Theta(g)$ .

*Hinweis.* Für die Definition von  $f$  und  $g$  dürfen Sie nur die Grundrechenarten, Logarithmen und Exponentialfunktionen und Kompositionen davon verwenden.

$$f(n) = n^2$$

$$g(n) = n$$

/ 2

- c) Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür an, dass ein Wort  $w \in \{a, b\}^+$  in  $L(T)$  liegt, d.h. von  $T$  akzeptiert wird.

*Hinweis.* Sie dürfen dabei keinen Bezug auf  $T$  nehmen.

### Lösung 7

- c)  $f: \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$  bezeichne die Abbildung mit  $f(a) = b$  und  $f(b) = a$ . Ferner sei  $h_f: \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  der von  $f$  induzierte Homomorphismus und  $\text{rev}: \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  die Abbildung, die ein Wort auf Ihr Spiegelbild abbildet (d.h.  $\text{rev}(\varepsilon) = \varepsilon$  und  $\text{rev}(xw) = \text{rev}(w)x$  für alle  $x \in \{a, b\}$  und  $w \in \{a, b\}^*$ ). Dann ist

$$L(T) = \{w \cdot x \cdot h_f(\text{rev}(w)) \mid w \in \{a, b\}^*, x \in \{\varepsilon, a, b\}\}.$$

Alternativ ist  $L(T) = L(G)$ , wobei  $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$  eine Grammatik mit

$$P = \{ S \rightarrow aSb \mid bSa \mid a \mid b \mid \varepsilon \}$$

ist.

---

*Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7:*