Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 1
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 16. Oktober 2019

Abgabe: 29. Oktober 2019, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig
- handschriftlich
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 1: / 19

Aufgabe 1.1 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
Es seien A, B und C drei endliche Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Wenn A Element von B ist (d.h. $A \in B$), dann ist A auch Teilmenge von B ($A \subseteq B$).
b) Ist B nicht leer, so haben wir $|A \setminus B| < |A|$.
c) Aus $(2^A \cup 2^B) \subseteq 2^C$ folgt, dass $A \subseteq C$.

Lösung 1.1

a) Die Aussage ist *falsch*. Z. B. für $A = \{1\}$ und $B = \{A\}$ ist $1 \notin B$, also $A \not\subseteq B$.
b) Die Aussage ist *falsch*. Z. B. ist $A = \varnothing$, so gilt $|A \setminus B| = |\varnothing| = 0 \not< 0 = |A|$.
c) Die Aussage ist *wahr*. Weil $2^A \subseteq (2^A \cup 2^B)$ ist, gilt $2^A \subseteq 2^C$. Dies wiederum impliziert $A \subseteq C$: Ist $x \in A$, so ist $\{x\} \in 2^A$; damit gilt $\{x\} \in 2^C$, und es folgt $x \in C$.

Aufgabe 1.2 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
Es seien A und B endliche Mengen. Betrachten Sie für jede der folgenden Mengen C_i die maximale (bzw. minimale) Anzahl M_i (bzw. m_i) von Elementen, die C_i in Abhängigkeit von den Größen von A und B enthalten kann, d.h. es soll stets $m_i \leq |C_i| \leq M_i$ gelten. Geben Sie für jedes C_i Schranken an, die scharf sind, d.h. es soll tatsächlich $m_i = |C_i|$ bzw. $M_i = |C_i|$ für eine gewisse Wahl von A und B gelten. Nennen Sie anschließend jeweils konkrete Beispiele für A und B, sodass diese Gleichheiten zutreffen.

a) $C_1 = A \cup B$
b) $C_2 = A \cap B$
c) $C_3 = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Lösung 1.2

a) $m_1 = \max(|A|, |B|)$ (z. B. wenn $A \subseteq B$), $M_1 = |A| + |B|$ (wenn A und B disjunkt)
b) $m_2 = 0$ (wenn A und B disjunkt), $M_2 = \min(|A|, |B|)$ (z. B. wenn $B \subseteq A$)
c) $m_3 = 0$ (wenn $A = B$), $M_3 = |A| + |B|$ (wenn A und B disjunkt)

Aufgabe 1.3 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
Für eine Abbildung $f\colon A \to B$ und $C \subseteq A$ sei $f(C) = \{f(x) \mid x \in C\}$. Außerdem sei $G = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ ist durch 2 teilbar}\}$ die Menge aller geraden natürlichen Zahlen. Geben Sie $f_i(\mathbb{N}_0)$ und $f_i(G)$ für jede Abbildung $f_i\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, wobei f_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $x \in \mathbb{N}_0$ wie folgt festgelegt ist:

a) $f_1(x) = x + 1$
b) $f_2(x) = 2x$
c) $f_3(x) = \begin{cases} f_2(x), & x \in G \\ f_1(x), & x \notin G \end{cases}$

Hinweis. Sie müssen die jeweiligen Mengen präzise angeben. Für Angaben „mit Pünktchen" (z.B. $G = \{0, 2, 4, \dots\}$) werden keine Punkte vergeben.

Lösung 1.3
Sei $U = \mathbb{N}_0 \setminus G$ die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.

a) $f_1(\mathbb{N}_0) = \mathbb{N}_+$, $f_1(G) = U$
b) $f_2(\mathbb{N}_0) = G$, $f_2(G) = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ ist durch 4 teilbar}\}$
c) $f_3(\mathbb{N}_0) = f_2(G) \cup f_1(U) = G$, $f_3(G) = f_2(G)$

Aufgabe 1.4 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)
Es seien A und B endliche Mengen. Geben Sie in Abhängigkeit von $|A|$ und $|B|$ die Anzahl Relationen $R \subseteq A \times B$, die folgende Eigenschaft haben:

a) R ist rechtseindeutig.
b) R ist rechtseindeutig aber nicht linkstotal.
c) R ist linkstotal oder nicht rechtseindeutig.

Tipp. Die Anzahl Abbildungen von A nach B ist gleich $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Lösung 1.4
Sei $M \subseteq 2^{A\times B}$ die Menge der rechtseindeutigen Relationen auf $A \times B$. (In einem späteren Kapitel der Vorlesung werden wir sehen, dass solche Relationen *partielle Abbildungen* heißen.) Man kann jedes $R \in M$ als Abbildung $A \to B \cup \{\otimes\}$ ansehen, wobei $\otimes \notin B$ für „undefiniert“ steht.

a) $|M| = |(B \cup \{\otimes\})^A| = (|B| + 1)^{|A|}$
b) $|M \setminus B^A| = (|B| + 1)^{|A|} - |B|^{|A|}$ (weil $B^A \subseteq M$)
c) $|2^{A\times B} \setminus (M \setminus B^A)| = 2^{|A||B|} - (|B| + 1)^{|A|} + |B|^{|A|}$ (wieder weil $M \setminus B^A \subseteq 2^{A\times B}$ und $2^{A\times B}$ die Menge aller Relationen auf $A \times B$ ist)

Aufgabe 1.5 (1 Punkt)
In diesem Semester wird es 12 Aufgabenblätter geben. Es sei $B = \{i \in \mathbb{N}_+ \mid 1 \leq i \leq 12\}$. Für $i \in B$ sei M_i die maximal auf Aufgabenblatt i erreichbare Anzahl an Punkten und P_i die Anzahl an Punkten, die Sie am Ende des Semesters für Blatt i erreicht haben.

Geben Sie eine möglichst präzise hinreichende Bedingung dafür an, dass Sie den GBI-Übungsschein bekommen.

Lösung 1.5

$$\sum_{i=1}^{6} P_i \geq 0.5 \cdot \sum_{i=1}^{6} M_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=7}^{12} P_i \geq 0.5 \cdot \sum_{i=7}^{12} M_i$$