Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 2
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:

Tutor*in:

Matr.nr. 1:

Nach-,Vorname 1: ,

Matr.nr. 2:

Nach-,Vorname 2: ,

Ausgabe:	25. Oktober 2019
Abgabe:	5. November 2019, 12:30 Uhr im GBI-Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- rechtzeitig
- handschriftlich
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 2: / 22

Liebe Erstsemester, die Fachschaft Mathematik/Informatik veranstaltet jedes Jahr das sog. Eulenfest am Infobau (50.34). Traditionell wird dieses Fest von Erstsemestern organisiert, und genau dafür brauchen wir euch! Wir laden jeden mit Lust an der Mitgestaltung des diesjährigen Eulenfestes ganz herzlich zum ersten Orga-Treffen am Mo., den 28.10. um 19:30 Uhr im Raum -120 (Infobau) ein!
Eure Fachschaft Mathematik/Informatik

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ ein Alphabet. Definieren Sie eine binäre Operation $\diamond\colon A^* \times A^* \to A^*$, die zwar kommutativ, aber nicht assoziativ ist. Beweisen Sie anschließend, dass Ihre Operation diese zwei Eigenschaften hat.

Lösung 2.1
Es gibt verschiedene Lösungen. Eine davon wäre z. B. $\diamond$ wie folgt zu definieren:

$$\forall w_1, w_2 \in A^* : w_1 \diamond w_2 = \begin{cases} \mathtt{a}^{|w_1 w_2|}, & N_{\mathtt{a}}(w_1 w_2) > N_{\mathtt{b}}(w_1 w_2) \\ \mathtt{b}^{|w_1 w_2|}, & N_{\mathtt{a}}(w_1 w_2) \leq N_{\mathtt{b}}(w_1 w_2) \end{cases}$$

Das ist kommutativ, da $x^{|w_1 w_2|} = x^{|w_2 w_1|}$ sowie $N_x(w_1 w_2) = N_x(w_2 w_1)$ für beliebiges $x \in A$ ist. Es ist aber nicht assoziativ:

$$(\mathtt{a} \diamond \mathtt{ab}) \diamond \mathtt{b} = \mathtt{aaa} \diamond \mathtt{b} = \mathtt{aaaa} \neq \mathtt{bbbb} = \mathtt{a} \diamond \mathtt{bbb} = \mathtt{a} \diamond (\mathtt{ab} \diamond \mathtt{b})$$

Aufgabe 2.2 (1.5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2.5 = 8 Punkte)
Sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ ein Alphabet. Gegeben eine Abbildung $s\colon \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$, definieren wir eine Abbildung $f_s\colon A^* \times \mathbb{N}_0 \to A^*$ wie folgt:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : f_s(\varepsilon, i) = \varepsilon$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_0\ \forall w \in A^*\ \forall x \in A : f_s(xw, i) = \begin{cases} x f_s(w, i+1), & \text{wenn } s(i) = 1 \\ f_s(w, i+1), & \text{wenn } s(i) = 0 \end{cases}$$

a) Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ sei $s(i)$ wie folgt:

$$s(i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } i \text{ gerade} \end{cases}$$

Berechnen Sie $f_s(w, 0)$ Schritt für Schritt für jedes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{bb}, \mathtt{ababb}\}$.
Hinweis. Wenden Sie bei jedem Schritt die Definition von f_s höchstens einmal an.

b) Was ist $|f_s(w, 0)|$, wenn $w \in A^*$ beliebig ist?

c) Seien $s_0, s_1\colon \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ Abbildungen mit $s_0(i) = 0$ und $s_1(i) = 1$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie $f_{s_0}(w, 0)$ und $f_{s_1}(w, 0)$ für jedes $w \in A^*$ an.

d) Es sei jetzt $w = \mathtt{abbabab}$. Geben Sie eine Abbildung $s\colon \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ an, sodass $f_s(w, 0) = \mathtt{aaa}$ ist.

e) Es sei $s\colon \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ und $i \in \mathbb{N}_0$. Definieren Sie $s_i\colon \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall w \in A^* : f_{s_i}(w,0) = f_s(w,i)$$

f) Gegeben Abbildungen $r_1, r_2\colon \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$, sei $v_{r_1,r_2}\colon \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ so, dass für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$v_{r_1,r_2}(i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } r_1(i) = r_2(i) = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für r_1 und r_2 an, damit Folgendes gilt:

$$\forall w \in A^* : f_{v_{r_1,r_2}}(w,0) = f_{r_1}(w,0) f_{r_2}(w,0)$$

Tipp. Denken Sie zuerst darüber nach, was gelten muss, damit die Wörter auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Länge haben. Beschränken Sie sich anschließend auf Wörter einer festen Länge $n \in \mathbb{N}_0$ (also $|w| = n$) und finden Sie da eine (auf Wörter der Länge n eingeschränkte) Bedingung für r_1 und r_2. Verallgemeinern Sie zum Schluss diese Bedingung auf Wörter beliebiger Länge.

Lösung 2.2

a) $f_s(\texttt{a},0) = f_s(\varepsilon,1) = \varepsilon$
$f_s(\texttt{bb},0) = f_s(\texttt{b},1) = \texttt{b}f_s(\varepsilon,2) = \texttt{b}$
$f_s(\texttt{ababb},0) = f_s(\texttt{babb},1) = \texttt{b}f_s(\texttt{abb},2) = \texttt{b}f_s(\texttt{bb},3) = \texttt{bb}f_s(\texttt{b},4) = \texttt{bb}f_s(\varepsilon,5) = \texttt{bb}$

b) $\frac{|w|}{2}$ falls $|w|$ gerade, ansonsten $\frac{|w|-1}{2}$

c) $f_{s_0}(w,0) = \varepsilon$, $f_{s_1}(w,0) = w$

d) $s(0) = s(3) = s(5) = 1$, $s(1) = s(2) = s(4) = s(6) = 0$, und $s(i)$ für $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i > 6$ beliebig

e) $\forall x \in \mathbb{N}_0 : s_i(x) = s(x+i)$

f) es gibt ein $t \in \mathbb{N}_0$ so, dass

   i) $\forall i \geq t : r_1(i) = 0$ und

   ii) $\forall j < t : r_2(j) = 0$

Äquivalent dazu ist z. B. auch folgende Bedingung:
Es gibt nicht $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ mit $i < j < k$ und so, dass $r_1(i) = r_2(j) = r_1(k) = 1$ ist
Erläuterungen:

- Beobachtung: Die Länge von $f_s(w,0)$ ist die Anzahl der $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$ mit $s(i) = 1$.
- Damit $f_{v_{r_1,r_2}}(w,0)$ und $f_{r_1}(w,0)f_{r_2}(w,0)$ gleiche Länge haben, darf es kein $i < |w|$ geben mit $r_1(i) = r_2(i) = 1$. Wenn die Längen für jedes w gleich sein sollen, darf es also überhaupt kein $i \in \mathbb{N}_0$ geben mit $r_1(i) = r_2(i) = 1$. Diese Bedingung ist also jedenfalls *notwendig*.
- Diese Bedingung ist aber noch *nicht* hinreichend, wie man z. B. am Wort `aba` sieht:

i	0	1	2	
$w(i)$	a	b	a	
$r_1(i)$	1	0	1	$\cdots$
$r_2(i)$	0	1	0	$\cdots$
$v_{r_1,r_2}(i)$	1	1	1	$\cdots$
$f_{r_1}(w,0)$	a		a	also $f_{r_1}(w,0) = \mathtt{aa}$
$f_{r_2}(w,0)$		b		also $f_{r_2}(w,0) = \mathtt{b}$
$f_{v_{r_1,r_2}}(w,0)(i)$	a	b	a	also $f_{v_{r_1,r_2}}(w,0) = \mathtt{aba} \neq \mathtt{aa} \cdot \mathtt{b}$

Aufgabe 2.3 (1 + 1 + 2 + 2.5 + 1 + 2.5 = 10 Punkte)

In dieser Aufgabe (und weiteren auf kommenden Aufgabenblättern) geht es um das *Postsche Korrespondenzproblem (PKP)*, das nach dem Mathematiker Emil Leon Post benannt ist. Warum das ein interessantes und wichtiges Problem aus der theoretischen Informatik ist, werden Sie noch in anderen Vorlesungen erfahren.

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Beim PKP arbeitet man mit Paaren von Wörtern. Daher führen wir als erstes die Abkürzung $P = A^* \times A^*$ ein; es ist also z. B. $(\mathtt{aab}, \mathtt{ba}) \in P$. Außerdem definieren wir die binäre Operation $\diamond\colon P \times P \to P$ durch die Festlegung:

$$(t_1, b_1) \diamond (t_2, b_2) = (t_1 t_2, b_1 b_2)$$

a) Die Operation $\diamond$ besitzt ein neutrales Element. Geben Sie es an und beweisen Sie, dass es das neutrale Element ist.

b) Beweisen Sie, dass die Operation $\diamond$ assoziativ ist.

Eine *Instanz* des PKPs ist eine nichtleere Liste $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in P^n$ von Paaren von Wörtern, die man manchmal auch *Dominos* nennt.

Zu einer PKP-Instanz $D \in P^n$ heißt eine Indexfolge $(i_1, i_2, \ldots, i_m) \in \{1, \ldots, n\}^m$ mit $m \in \mathbb{N}_+$ eine *Lösung* für D, wenn sie diese Eigenschaft hat:

$$\text{für } (t, b) = d_{i_1} \diamond d_{i_2} \diamond \cdots \diamond d_{i_m} \text{ gilt: } t = b \qquad \text{(PKP)}$$

Hinweis. Ausnahmsweise haben wir gerade diese Pünktchen „$\cdots$“ benutzt. Wir werden später in der Vorlesung sehen, wie man z. B. hier ohne sie hätte auskommen können.

c) Es sei $n = 3$ sowie $d_1 = (\mathtt{a}, \mathtt{aba})$, $d_2 = (\mathtt{ba}, \mathtt{a})$ und $d_3 = (\mathtt{aba}, \mathtt{b})$. Geben Sie eine Lösung für diese PKP-Instanz an.
Hinweis. Es gibt eine Lösung mit $m = 5$.

d) Es sei jetzt $d_1 = (\mathtt{ab}, \mathtt{a})$, $d_2 = (\mathtt{ab}, \mathtt{ba})$ und $d_3 = (\mathtt{ba}, \mathtt{b})$. Begründen Sie, warum diese PKP-Instanz keine Lösung haben kann.

e) Welche Möglichkeiten gibt es für die Anzahl Lösungen einer (beliebigen) PKP-Instanz?

f) Geben Sie Paare $d_1 = (t_1, b_1)$, $d_2 = (t_2, b_2)$ und $d_3 = (t_3, b_3)$ (alle aus P) an, sodass $t_1, t_2, t_3, b_1, b_2, b_3$ alle unterschiedliche Wörter sind (d. h. $|\{t_1, t_2, t_3, b_1, b_2, b_3\}| = 6$) und eine Lösung für die Instanz $D = (d_1, d_2, d_3)$ des PKPs existiert, in der jedes Domino d_i mindestens einmal vorkommt. Geben Sie anschließend eine solche Lösung für D an.

Lösung 2.3

a) $(\varepsilon, \varepsilon)$ ist da neutrale Element, da für $(t, b) \in P$ gilt:

$$(t, b) \diamond (\varepsilon, \varepsilon) = (t, b) = (\varepsilon, \varepsilon) \diamond (t, b)$$

b) Es sei $(t_i, b_i) \in P$ für $i \in \{1,2,3\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
((t_1, b_1) \diamond (t_2, b_2)) \diamond (t_3, b_3) &= (t_1 t_2, b_1 b_2) \diamond (t_3, b_3) \\
&= (t_1 t_2 t_3, b_1 b_2 b_3) \\
&= (t_1, b_1) \diamond (t_2 t_3, b_2 b_3) \\
&= (t_1, b_1) \diamond ((t_2, b_2) \diamond (t_3, b_3))
\end{aligned}$$

c) $(1,2,1,3,2)$

d) Sei $L = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in \{1, \dots, n\}^m$ gegeben sowie $(t, b) = d_{i_1} \diamond d_{i_2} \diamond \dots \diamond d_{i_m}$, wobei $m \in \mathbb{N}_+$ ist; insbesondere gilt $t \neq \varepsilon \neq b$. Damit $t = b$ gilt, so muss auch $t(0) = b(0)$ gelten; das heißt, wir können annehmen, dass auch $i_1 \neq 2$ der Fall ist. Es folgt $i_1 \in \{1,3\}$ und somit $|t_{i_1}| > |b_{i_1}|$, was wiederum bedeutet

$$|t| = |t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_m}| = \sum_{j=1}^{m} |t_{i_j}| = |t_{i_1}| + \sum_{j=2}^{m} |t_{i_j}| > |b_{i_1}| + \sum_{j=2}^{m} |t_{i_j}| \geq |b_{i_1}| + \sum_{j=2}^{m} |b_{i_j}|,$$

wo wir bei dieser letzten Abschätzung verwenden, dass $|t_k| \geq |b_k|$ für $k \in \{1,2,3\}$ gilt. Da die rechte Seite gleich $\sum_{j=1}^{m} |b_{i_j}| = |b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_m}| = |b|$ ist, so erhalten wir $t \neq b$. Damit kann L keine Lösung der PKP-Instanz sein.

e) Entweder keine oder unendlich viele
Erklärung. Ist $L = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ eine Lösung, so auch $L' = (i_1, i_2, \dots, i_m, i_1, i_2, \dots, i_m)$, wobei L' echt länger als L ist (und insbesondere $L' \neq L$). Also, angenommen eine PKP-Instanz besitzt mindestens eine Lösung, so kann man dieses Argument wiederholen und unendlich viele Lösungen bekommen.

f) Z. B. $(t_1, b_1) = (a, a^2)$, $(t_2, b_2) = (a^4, a^3)$, und $(t_3, b_3) = (a^6, a^5)$. Dann ist $(1,2,1,3)$ eine Lösung, bei der jeder Dominostein mindestens einmal vorkommt.