# Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 3
Lösungsvorschläge

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tutorium Nr.: | | Tutor*in: | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Matr.nr. 1: | | | |
| Nach-,Vorname 1: | | , | |
| Matr.nr. 2: | | | |
| Nach-,Vorname 2: | | , | |

Ausgabe: 31. Oktober 2019

Abgabe: 12. November 2019, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- rechtzeitig
- handschriftlich
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

---

*Vom Tutor auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 3: / 19

**Aufgabe 3.1 (2 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)**
Es seien $\mathtt{P}$, $\mathtt{Q}$, und $\mathtt{R}$ aussagenlogische Variablen.

a) Stellen Sie eine Wahrheitstabelle für folgende aussagenlogische Formel auf:

$$G = ((\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q}) \vee (\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{R})) \rightarrow (\mathtt{Q} \rightarrow \mathtt{R})$$

*Hinweis*. Führen Sie bei Ihre Wahrheitstabelle für jedes aussagenlogische Konnektiv von $G$ eine dazu zugehörige Spalte auf.

b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel $G'$ an, die zu $\neg G$ äquivalent ist (d. h., es gilt $G' \equiv \neg G$) und die höchstens zwei aussagenlogische Konnektive (d. h. also $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, oder $\leftrightarrow$) enthält.
*Hinweis*. Die Negation ($\neg$) dürfen Sie als Konnektiv beliebig oft verwenden.

c) Geben Sie eine Tautologie $G''$ an, die sich von $G$ um höchstens ein Zeichen unterscheidet.

d) Gibt es eine Formel $F$, sodass $G \rightarrow F$ unerfüllbar ist? Falls ja, geben Sie eine solche Formel an; andernfalls begründen Sie, warum dies nicht der Fall sein kann.

**Lösung 3.1**

a) Wahrheitstabelle:

| $\mathtt{P}$ | $\mathtt{Q}$ | $\mathtt{R}$ | $\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q}$ | $\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{R}$ | $(\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q}) \vee (\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{R})$ | $\mathtt{Q} \rightarrow \mathtt{R}$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f** | **f** | **f** | **w** | **w** | **w** | **w** | **w** |
| **f** | **f** | **w** | **w** | **w** | **w** | **w** | **w** |
| **f** | **w** | **f** | **w** | **w** | **w** | **f** | **f** |
| **f** | **w** | **w** | **w** | **w** | **w** | **w** | **w** |
| **w** | **f** | **f** | **f** | **f** | **f** | **w** | **w** |
| **w** | **f** | **w** | **f** | **w** | **w** | **w** | **w** |
| **w** | **w** | **f** | **w** | **f** | **w** | **f** | **f** |
| **w** | **w** | **w** | **w** | **w** | **w** | **w** | **w** |

b) $\mathtt{Q} \wedge \neg \mathtt{R}$

c) $G = ((\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q}) \vee (\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{R})) \vee (\mathtt{Q} \rightarrow \mathtt{R})$

d) Nein, das kann nicht sein, weil es eine Interpretation $I$ gibt, sodass $val_I(G) = \mathbf{f}$. Damit ist $val_I(G \rightarrow F) = b_{\rightarrow}(\mathbf{f}, val_I(F)) = \mathbf{w}$, also ist $G \rightarrow F$ stets erfüllbar.

**Aufgabe 3.2 (1 + 1 + 3 + 1 + 2 + 3 = 11 Punkte)**
Es sei $Var_{AL} \subseteq \{\mathtt{P}_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ein Alphabet aussagenlogischer Variablen. Für eine Menge $M \subseteq For_{AL}$ von aussagenlogischen Formeln sowie $i \in \mathbb{N}_0$ möge $V_i(M)$ wie folgt induktiv definiert sein:

$$V_0(M) = M \qquad \text{und} \qquad V_{i+1}(M) = \{f \wedge g \mid f \in V_i(M), g \in M\}$$

Außerdem sei $V(M) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} V_i(M)$.

a) Geben Sie $V_3(M)$ für $M = \{\mathtt{P}\}$ explizit an.

b) Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $M = \{\mathtt{P}_j \mid j \in \mathbb{Z}_m\}$. Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck für $|V_i(M)|$ in Abhängigkeit von $i \in \mathbb{N}_0$ und $m$ an.
*Erinnerung*. $\mathbb{Z}_m = \{j \in \mathbb{N}_0 \mid j < m\}$

c) Beweisen Sie Ihre Behauptung aus b) mittels vollständiger Induktion über $i \in \mathbb{N}_0$.

Es sei jetzt $Var_{AL} = \{\mathtt{P}, \mathtt{Q}, \mathtt{R}, \mathtt{S}\}$. Ferner bezeichne $\bot$ die unerfüllbare Formel $\mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{P}$ sowie $\top$ die Tautologie $\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{P}$. Eine *Horn-Klausel* ist ein Element der Menge

$$K = \{\top \to v \mid v \in Var_{AL}\} \cup \{f \to g \mid f \in V(Var_{AL}), g \in Var_{AL} \cup \{\bot\}\}$$

und eine *Horn-Formel* ein Element der Menge $V(K)$.

d) Geben Sie eine Horn-Formel $F \in V(K)$ mit mindestens 6 Horn-Klauseln an und so, dass diese Klauseln alle paarweise nicht äquivalent sind (d. h., sind $k_1$ und $k_2$ Klauseln von $F$ und $k_1 \neq k_2$, so gilt $k_1 \not\equiv k_2$). Kennzeichen Sie anschließend, was die Horn-Klauseln von $F$ sind.

e) Gibt es eine unerfüllbare Horn-Formel $G \in V(K)$, in der $\bot$ als Teilwort nicht vorkommt? Wenn ja, geben Sie eine solche Formel an; andernfalls begründen Sie, warum dies nicht der Fall sein kann.

f) Betrachten Sie folgende Horn-Formel:

$$H = (\mathtt{P} \wedge \mathtt{R} \to \mathtt{Q}) \wedge (\top \to \mathtt{Q}) \wedge (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \wedge \mathtt{S} \to \bot) \wedge (\mathtt{Q} \to \mathtt{S})$$

Geben Sie eine Interpretation $I\colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ an, die Modell von $H$ ist und so, dass die Anzahl Variablen, die von $I$ mit $\mathbf{f}$ belegt werden (d. h. $|\{v \in Var_{AL} \mid I(v) = \mathbf{f}\}|$), minimal ist. Begründen Sie anschließend, warum Ihre Interpretation $I$ tatsächlich minimal ist.
*Hinweis*. Ihre Begründung soll möglichst prägnant sein. Insbesondere sollen Sie keine Wahrheitstabelle o. Ä. angeben.

**Lösung 3.2**

a) $V_3(M) = \{\mathtt{P} \wedge \mathtt{P} \wedge \mathtt{P} \wedge \mathtt{P}\}$

b) $|V_i(M)| = m^{i+1}$

c) Zu beweisen: Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: $|V_i(M)| = m^{i+1}$.
   - *Induktionsanfang* ($i = 0$): $|V_0(M)| = |M| = m = m^{0+1}$
   - *Induktionsschritt* ($i \to i+1$): Es sei $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig
     *Induktionsvoraussetzung* (IV): $|V_i(M)| = m^{i+1}$
     Zu zeigen ist die
     *Induktionsbehauptung*: $|V_{i+1}(M)| = m^{i+2}$
     Es ist $V_{i+1}(M) = \{f \wedge g \mid f \in V_i(M), g \in M\}$. Für jedes $f \in V_i(M)$ gibt es daher $|M|$ unterschiedliche Formeln $f \wedge g$ mit $g \in M$ in $V_{i+1}(M)$ (und für $f', f'' \in V_i(M)$ mit $f' \neq f''$ sind $f' \wedge g'$ und $f'' \wedge g''$ für $g', g'' \in M$ stets unterschiedlich).
     Also ist $|V_{i+1}(M)| = |V_i(M)| \cdot |M|$. Das ist nach IV $= m^{i+1} \cdot m = m^{i+2}$.

d) Z. B. $(\top \to \mathtt{P}) \wedge (\top \to \mathtt{Q}) \wedge (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \wedge (\mathtt{Q} \wedge \mathtt{R} \to \bot) \wedge (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \to \mathtt{P}) \wedge (\mathtt{S} \to \bot)$
   Die Klauseln sind $\top \to \mathtt{P}$, $\top \to \mathtt{Q}$, $\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$, $\mathtt{Q} \wedge \mathtt{R} \to \bot$, $\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \to \mathtt{P}$ und $\mathtt{S} \to \bot$.

e) Nein, weil dann die Interpretation $I$ mit $I(v) = \mathbf{w}$ für jedes $v \in Var_{AL}$ stets Modell von $G$ ist.

f) $I(\mathtt{P}) = \mathbf{f}$ und für alle anderen $v \in Var_{AL}$: $I(v) = \mathbf{w}$
   Das ist minimal, denn werden in einer Interpretation $I$ *alle* Variablen mit $\mathbf{w}$ interpretiert, dann ist $val_I(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \wedge \mathtt{S} \to \bot) = \mathbf{f}$ und folglich auch $val_I(H) = \mathbf{f}$; $I$ wäre also gar kein Modell von $H$ wie gefordert.

**Aufgabe 3.3 (3 Punkte)**

Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die wie folgt festgelegt ist:

$$f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 : f(n+1) = 2f(n) + n + 5$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f(n) = 6(2^n - 1) - n$$

**Lösung 3.3**

- *Induktionsanfang*. Für $n = 0$ gilt:
  $f(0) = 0 = 6 \cdot 0 - 0 = 6 \cdot (2^0 - 1) - 0$
- *Induktonsschritt* $n \to n+1$: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig.
  *Induktionsvoraussetzung* (IV). Es gelte $f(n) = 6(2^n - 1) - n$
  Zu zeigen: *Induktionsbehauptung* (IB) $f(n+1) = 6(2^{n+1} - 1) - (n+1)$.
  Man rechnet:

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= 2f(n) + n + 5 \\
&\overset{\text{IV}}{=} 2(6(2^n - 1) - n) + n + 5 \\
&= 6(2^{n+1} - 2) - 2n + n + 5 \\
&= 6(2^{n+1} - 1) - 6 - n - 1 + 6 \\
&= 6(2^{n+1} - 1) - (n+1)
\end{aligned}$$