Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 4

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 7. November 2019

Abgabe: 19. November 2019, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig
- handschriftlich
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 4: / 21

Aufgabe 4.1 (1.5 + 1 + 1.5 = 4 Punkte)
Gegeben sei die formale Sprache

$$L = \{\mathtt{ab}\}^* \cup \{\mathtt{a}\} \cdot (\{\mathtt{a}\} \cdot \{\mathtt{a}, \mathtt{ab}\})^* \cdot \{\mathtt{bb}\}$$

über dem Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a) Geben Sie alle Wörter aus L an, deren Länge höchstens 4 ist.
b) Gilt $\varepsilon \in L^+$? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Geben Sie drei verschiedene Wörter $w_1, w_2, w_3 \in L^* \setminus L$ an.

Aufgabe 4.2 (1 + 1 + 1.5 + 1.5 = 5 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Für jede der folgenden Bedingungen B_i und $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sei $L_i = \{w \in A^* \mid w \text{ erfüllt } B_i\}$. Geben Sie für jede solche Sprache L_i einen formalen Ausdruck an, der genau L_i beschreibt. Verwenden Sie hierfür ausschließlich folgende Zeichen:

$$\mathtt{a} \quad \mathtt{b} \quad \{ \quad \} \quad (\quad) \quad , \quad * \quad \cdot \quad \cup$$

a) B_1: „$|w|$ ist ungerade und es gilt $w(0) \neq w(|w|-1)$“
b) B_2: „$|w| = 0$“
c) B_3: „w enthält nicht $\mathtt{ab}$“
d) B_4: „$w \in L_3 \to w \in L_2$“

Aufgabe 4.3 (1 + 1 + 3 + 1 = 6 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Für jede formale Sprache $L \subseteq A^*$ sei $\mathcal{A}(L)$ die Aussage:

$$(\{\mathtt{a}\} \cdot L)^* \cap A^+ = L \; .$$

a) Zeigen Sie: Für $L = \{\}$ gilt $\mathcal{A}(L)$.
b) Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{A}(L)$ gilt, dann ist $\varepsilon \notin L$.
c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:
Wenn $\mathcal{A}(L)$ gilt, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: $\quad \forall w \in L : |w| \geq n$.
d) Begründen Sie, warum aus den Aussagen von Teilaufgaben a) bis c) folgende Aussage folgt: Es gilt $\mathcal{A}(L)$ genau dann, wenn $L = \{\}$ ist.

Aufgabe 4.4 (1.5 + 3 + 1.5 = 6 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildung $h \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die wie folgt induktiv definiert ist:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}_+ : \quad h(2k) &= h(k) \\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : h(2k+1) &= 1 + h(k) \end{aligned}$$

a) Geben Sie $h(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, $n \leq 7$, tabellarisch an.
b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $0 \leq h(n) \leq n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
Hinweis. Verwenden Sie die starke Variante der vollständigen Induktion.
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ und $h(\mathrm{Num}_2(w))$?