Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 4
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.: Tutor*in:

Matr.nr. 1:

Nach-,Vorname 1: ,

Matr.nr. 2:

Nach-,Vorname 2: ,

Ausgabe: 7. November 2019

Abgabe: 19. November 2019, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- rechtzeitig
- handschriftlich
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 4: / 21

Aufgabe 4.1 **(1.5 + 1 + 1.5 = 4 Punkte)**
Gegeben sei die formale Sprache

$$L = \{\mathtt{ab}\}^* \cup \{\mathtt{a}\} \cdot (\{\mathtt{a}\} \cdot \{\mathtt{a}, \mathtt{ab}\})^* \cdot \{\mathtt{bb}\}$$

über dem Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a) Geben Sie alle Wörter aus L an, deren Länge höchstens 4 ist.
b) Gilt $\varepsilon \in L^+$? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Geben Sie drei verschiedene Wörter $w_1, w_2, w_3 \in L^* \setminus L$ an.

Lösung 4.1

a) $M_4 = \{\varepsilon, \mathtt{ab}, \mathtt{abb}, \mathtt{abab}\}$
b) Ja, weil $\varepsilon \in L = L^1$ und damit auch $\varepsilon \in L^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} L^i$.
c) Z. B. alle $w \in \{\mathtt{ab}\}^+\{\mathtt{a}\}\{\mathtt{aa}, \mathtt{aab}\}^*\{\mathtt{bb}\}$, also
$w_1 = \mathtt{ababb}$, $w_2 = \mathtt{abaaabb}$, und $w_3 = \mathtt{abaaaaabb}$

Aufgabe 4.2 **(1 + 1 + 1.5 + 1.5 = 5 Punkte)**
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Für jede der folgenden Bedingungen B_i und $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sei $L_i = \{w \in A^* \mid w \text{ erfüllt } B_i\}$. Geben Sie für jede solche Sprache L_i einen formalen Ausdruck an, der genau L_i beschreibt. Verwenden Sie hierfür ausschließlich folgende Zeichen:

a b { } ( ) , * · ∪

a) B_1: „$|w|$ ist ungerade und es gilt $w(0) \neq w(|w|-1)$"
b) B_2: „$|w| = 0$"
c) B_3: „w enthält nicht $\mathtt{ab}$"
d) B_4: „$w \in L_3 \to w \in L_2$"

Lösung 4.2
Natürlich gibt es viele mögliche richtige Antworten. Beispiele:
a) $L_1 = \{\mathtt{a}\} \cdot \{\mathtt{a},\mathtt{b}\} \cdot \{\mathtt{aa},\mathtt{ab},\mathtt{ba},\mathtt{bb}\}^* \cdot \{\mathtt{b}\} \cup \{\mathtt{b}\} \cdot \{\mathtt{a},\mathtt{b}\} \cdot \{\mathtt{aa},\mathtt{ab},\mathtt{ba},\mathtt{bb}\}^* \cdot \{\mathtt{a}\}$
b) $L_2 = \{\}^*$
c) $L_3 = \{\mathtt{b}\}^* \cdot \{\mathtt{a}\}^*$
d) $L_4 = \{w \in A^* \mid w \notin L_3 \vee w \in L_2\} = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \cdot \{\mathtt{ab}\} \cdot \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^* \cup \{\}^*$

Aufgabe 4.3 (1 + 1 + 3 + 1 = 6 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$. Für jede formale Sprache $L \subseteq A^*$ sei $\mathcal{A}(L)$ die Aussage:

$$(\{\mathtt{a}\} \cdot L)^* \cap A^+ = L\,.$$

a) Zeigen Sie: Für $L = \{\}$ gilt $\mathcal{A}(L)$.
b) Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{A}(L)$ gilt, dann ist $\varepsilon \notin L$.
c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:
Wenn $\mathcal{A}(L)$ gilt, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$: $\forall w \in L : |w| \geq n$.
d) Begründen Sie, warum aus den Aussagen von Teilaufgaben a) bis c) folgende Aussage folgt: Es gilt $\mathcal{A}(L)$ genau dann, wenn $L = \{\}$ ist.

Lösung 4.3
a) $(\{\mathtt{a}\} \cdot \{\})^* \cap A^+ = \{\}^* \cap A^+ = \{\varepsilon\} \cap A^+ = \{\}$
b) Zeige: Wenn $\varepsilon \in L$ ist, dann gilt $\mathcal{A}(L)$ nicht. Sei daher $\varepsilon \in L$.
Die Sprache $(\{\mathtt{a}\} \cdot L)^* \cap A^+$ enthält insbesondere nur Wörter aus A^+, also nur Wörter, deren Länge mindestens 1 ist, und damit ganz bestimmt *nicht* das leere Wort. Also ist $(\{\mathtt{a}\} \cdot L)^* \cap A^+ \neq L$, d. h. $\mathcal{A}(L)$ gilt nicht.
c) Es sei L eine formale Sprache, für die $\mathcal{A}(L)$ gilt.

Induktionsanfang: $n = 0$: Zu zeigen ist dann: $\forall w \in L : |w| \geq 0$.
Das ist offensichtlich wahr.

Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n+1$: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig.
Induktionsvoraussetzung: $\forall w \in L : |w| \geq n$
Induktionsbehauptung: zu zeigen: $\forall w \in L : |w| \geq n+1$
Nach IV ist $\forall w \in L : |w| \geq n$. Ist $w' \in L = (\{\mathtt{a}\} \cdot L)^* \cap A^+$, so gibt es $k \in \mathbb{N}_0$ mit $w' \in (\{\mathtt{a}\} \cdot L)^k$ und $w' \in A^+$. Wegen letzterem ist $w' \neq \varepsilon$ und damit auch $k \geq 1$, also $w' = w'_1 w'_2$ für gewisse $w'_1 \in \{\mathtt{a}\} \cdot L = \{\mathtt{a} \cdot w \mid w \in L\}$ und $w'_2 \in (\{\mathtt{a}\} \cdot L)^*$. Nach IV gilt $|w'| = |w'_1| + |w'_2| \geq |w'_1| \geq n+1$. Folglich hat auch jedes Wort in $L = (\{\mathtt{a}\} \cdot L)^* \cap A^+$ mindestens Länge $n+1$.

d) In a) wurde gezeigt: Wenn $L = \{\}$, dann gilt $\mathcal{A}(L)$.
Es bleibt noch zu zeigen: Wenn $\mathcal{A}(L)$ gilt, dann ist $L = \{\}$. Sei also L derart, dass $\mathcal{A}(L)$ wahr ist.
Sei $w \in A^*$ beliebig. Dann hat w eine feste Länge $k = |w|$. Da $\mathcal{A}(L)$ wahr ist, gilt laut Teilaufgabe c) insbesondere, dass alle Wörter in L mindestens Länge $k+1$ haben. Damit ist $w \notin L$. Da $w \in A^*$ beliebig war, so gilt also $L = \{\}$.

Aufgabe 4.4 **(1.5 + 3 + 1.5 = 6 Punkte)**

Betrachten Sie die Abbildung $h\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die wie folgt induktiv definiert ist:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}_+ : \qquad h(2k) &= h(k) \\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : h(2k+1) &= 1 + h(k) \end{aligned}$$

a) Geben Sie $h(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, $n \le 7$, tabellarisch an.

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $0 \le h(n) \le n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
Hinweis. Verwenden Sie die starke Variante der vollständigen Induktion.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*$ und $h(\mathrm{Num}_2(w))$?

Lösung 4.4

a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$h(n)$	0	1	1	2	1	2	2	3

b) IA ($n = 0$). Es gilt $0 \le 0 = h(0) = 0 \le 0$.
IS ($n \to n+1$). Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig.
Es gelte $0 \le h(n') \le n'$ *für jedes* $n' \in \mathbb{N}_0$ mit $n' \le n$ (IV). Man unterscheide zwischen den folgenden zwei Fällen:

- $n+1$ gerade. Dann ist $n+1 = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und damit $h(n+1) = h(k)$. Nach IV ist $0 \le h(k) \le k < n+1$.
- $n+1$ ungerade. Dann ist $n+1 = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und damit $h(n+1) = 1 + h(k)$. Nach IV gilt $0 \le h(k) \le n$ und damit auch $0 < 1 \le 1 + h(k) \le n+1$.

c) $h(\mathrm{Num}_2(w)) = N_1(w)$, wobei $N_1(w)$ die Anzahl Vorkommen von $\texttt{1}$ in w ist.
Diese Zahl wird auch *Hamming-Gewicht* von w genannt (nach dem amerikanischen Mathematiker Richard Hamming) und wird breit in der Kodierungstheorie angewendet.