Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 5

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 15. November 2019

Abgabe: 26. November 2019, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig
- handschriftlich
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 5: / 21

Hinweis: Auf den ersten 6 Aufgabenblättern wird man insgesamt genau 120 Punkte erreichen können. Wer den Übungsschein erwerben will, kann dies also nur dann sicher schaffen, wenn auf den ersten 6 Aufgabenblättern mindestens 60 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 5.1 (3 Punkte)
Es seien $a, b \in \mathbb{N}_+$ mit $a > b \geq 2$ gegeben. Zeigen Sie: Gibt es einen Homomorphismus $f\colon Z_a^* \to Z_b^*$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \mathrm{Num}_b(f(\mathrm{Repr}_a(x))) = x, \tag{BE}$$

so gibt es $n \in \mathbb{N}_+$ mit $a = b^n$.
Tipp. Es gilt $\mathtt{1} \in Z_b$. Überlegen Sie sich also zuerst, was $f(\mathtt{1})$ sein kann.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)
Es seien A und B Mengen und $|A|, |B| \geq 2$. Die Abbildungen

$$\pi_A\colon \begin{cases} A \times B \to A \\ (a,b) \mapsto a \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \pi_B\colon \begin{cases} A \times B \to B \\ (a,b) \mapsto b \end{cases}$$

heißen *Projektionen* von $A \times B$ auf A bzw. B.

Jede der folgenden vier Behauptungen ist wahr oder falsch. Geben Sie für jede entweder eine Begründung, warum sie falsch ist, oder geben Sie konkret eine entsprechende Abbildung λ_x bzw. ρ_x an.

a) Die Abbildung π_A besitzt eine linkssinverse Abbildung λ_A.
b) Die Abbildung π_A besitzt eine rechtsinverse Abbildung ρ_A.
c) Die Abbildung π_B besitzt eine linkssinverse Abbildung λ_B.
d) Die Abbildung π_B besitzt eine rechtsinverse Abbildung ρ_B.

Aufgabe 5.3 (1.5 + 1 + 1.5 + 2 = 6 Punkte)
Es sei M eine Menge und $f\colon M \to M$ eine Abbildung. Wir definieren eine Abbildung $\Phi_f\colon M \times \mathbb{N}_0 \to M$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \forall x \in M : \qquad & \Phi_f(x, 0) = x \\ \forall x \in M, n \in \mathbb{N}_0 : \qquad & \Phi_f(x, n+1) = \Phi_f(f(x), n) \end{aligned}$$

Ferner sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $B = A \cup \{\$\}$, und $f\colon B^* \to B^*$ sei wie folgt festgelegt:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \forall x \in B\ \forall w \in B^*\colon f(xw) = wx\$$$

a) Geben Sie $\Phi_f(w, 3)$ für jedes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{bb}, \mathtt{aaaa}, \mathtt{bababa}\}$ an.
b) Es sei $N_\$(w)$ für beliebiges $w \in B^*$ die Anzahl Vorkommen des Zeichens „$“ in w. Geben Sie $N_\$(\Phi_f(w, n))$ für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ und $w \in B^*$ an.
c) Welchen Wert hat $\Phi_f(w, |w|)$ für beliebiges $w \in A^*$?
d) Betrachten Sie die Abbildung $C\colon B^* \to B^*\colon w \mapsto \Phi_f(w, |w|)$. Sie ist injektiv, also eine Codierung. Nennen Sie zwei aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften von Codierungen, die C hat. Begründen Sie Ihre Antwort. Sie dürfen dazu Ihre Behauptung aus Teilaufgabe c) benutzen (ohne sie noch zu beweisen).

Aufgabe 5.4 (2.5 + 1 + 1.5 = 5 Punkte)

Es sei $A = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ sowie $d\colon A^* \to A^*$ der Homomorphismus mit $d(\texttt{0}) = \texttt{00}$ und $d(\texttt{1}) = \texttt{11}$. Ferner sei $C\colon A^* \times A^* \to A^*$ wie folgt definiert:

$$\forall x, y \in A^* : C(x, y) = x\texttt{01}d(y)$$

a) Es sei $z \in A^*$ ein Wort, für das es mindestens ein Paar $(x, y) \in A^* \times A^*$ gibt mit $z = C(x, y)$. Beschreiben Sie präzise, wie man solche Wörter x und y bestimmen kann, wenn man nur z gegeben hat. Begründen Sie, warum x und y immer eindeutig bestimmt sind.

Betrachten Sie jetzt die Abbildung:

$$D\colon \begin{cases} (A^* \times A^*)^2 \to A^* \\ (z_1, z_2) \mapsto C(z_1)C(z_2) \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass D nicht injektiv ist.

c) Geben Sie eine Abbildung E mit gleichem Definitions- und Zielbereich wie D an, die injektiv ist. Erleichtern Sie sich möglichst die Arbeit, indem Sie an der Festlegung des Funktionswertes $D(z_1, z_2)$ nur „kleine Änderungen“ vornehmen. Begründen Sie, dass Ihr E injektiv ist.

Aufgabe 5.5 (1.5 + 1.5 = 3 Punkte)

Sei $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}\}$ und $B = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$. Zudem sei C die Codierung $C\colon A^* \to B^*$, die als Homomorphismus wie folgt induziert wird:

$$C(\texttt{a}) = \texttt{00}, \qquad C(\texttt{b}) = \texttt{01}, \qquad C(\texttt{c}) = \texttt{10}, \qquad C(\texttt{d}) = \texttt{11}$$

a) Geben Sie ein Wort $w \in A^*$ minimaler Länge derart an, dass:
   - jedes Zeichen von A mindestens einmal in w vorkommt und
   - jede Huffman-Codierung von w echt kürzer ist als $C(w)$.

b) Erstellen Sie einen Huffman-Baum zu Ihrem Wort w aus Teilaufgabe a) und geben Sie für jedes Zeichen von A seine Codierung an.