Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 7
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: 29. November 2019

Abgabe: 10. Dezember 2019, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 7:	/ 21
Blätter 7 – 7:	/ 21

Hinweis. Ab diesem Aufgabenblatt sind alle Lösungen einzeln (und nicht mehr in Zweiergruppen) abzugeben.

Aufgabe 7.1 (1.5 + 1.5 = 3 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Geben Sie für die folgenden zwei Gleichungen jeweils an, ob es eine Sprache L bzw. L' aus Wörtern in A^* gibt, die die entsprechende Gleichung erfüllt. Falls es eine solche Sprache existiert, dann geben Sie sie explizit an; andernfalls begründen Sie ausführlich, warum dies nicht der Fall sein kann.

a) $L = \{\varepsilon\} \cup L \cdot \{\mathtt{abc}\} \cdot L$
b) $L' = L' \cdot \{\mathtt{abc}\} \cdot L'$

Lösung 7.1

a) $L = \{\mathtt{abc}\}^*$
b) $L' = \varnothing$

Aufgabe 7.2 (1.5 + 1 + 1.5 = 4 Punkte)
Es sei eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$ gegeben, wobei $\$ \notin N \cup T$ ist. Ferner sei $T_1 = T \cup \{\$\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ an, für die gilt:
   - $L(G) \subseteq L(G_1)$; und
   - $\forall u \in T^*\ \forall w \in T_1^* : \quad u\$w \in L(G_1) \quad \text{gdw.} \quad u \in L(G) \land w \in L(G_1)$.

   Ihre Grammatik G_1 darf dabei höchstens $|N| + 2$ Nichtterminalsymbole haben (d. h. $|N_1| \leq |N| + 2$).
b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass es ein Wort $w' \in L(G_1)$ gibt, sodass $\$\$$ Teilwort von w' ist.
c) Angenommen, es würde doch $\$ \in T$ gelten (also $T_1 = T$). Hat Ihr G_1 immer noch im Allgemeinen (sprich für eine beliebige Wahl von G) die Eigenschaften, die in Teilaufgabe a) gefordert wurden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 7.2

a) Es sei $S_1 \notin N$.
   $N_1 = \{S_1\} \cup N$, $P_1 = \{S_1 \to S\$S_1 \mid S\} \cup P$
   Achtung: Statt S_1 einfach S zu nehmen ist *falsch*, z. B. wenn $P = \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \varepsilon\}$
b) $\varepsilon \in L(G)$
c) Nein. Z. B. wäre $N = \{S\}$, $T = \{\mathtt{a}\}$ und $P = \{S \to \mathtt{a\$}\}$, dann hätten wir $L(G) = \{\mathtt{a\$}\}$ und damit auch $\mathtt{a\$} \in L(G_1)$. Nach der zweiten Eigenschaft müsste aber dann $u = \mathtt{a} \in L(G)$ gelten, was nicht stimmt.

Aufgabe 7.3 (1 + 1 + 1.5 + 1.5 = 5 Punkte)
Sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Ferner sei für $i \in \{1, 2\}$ die kontextfreie Grammatik $G_i = (\{S_i\}, A, S_i, P_i)$ gegeben, wobei:

$$P_1 = \{S_1 \to \mathtt{aa}S_1 \mid \mathtt{bb} \mid \mathtt{c}S_1\} \qquad P_2 = \{S_2 \to \mathtt{a}S_2\mathtt{b} \mid \mathtt{b}S_2\mathtt{a} \mid \mathtt{c}\}$$

a) Geben Sie ein Wort $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$ minimaler Länge an.
b) Zeichnen Sie zu G_1 und G_2 jeweils einen Ableitungsbaum für w.
c) Was ist $|L(G_1) \cap L(G_2)|$? Begründen Sie Ihre Antwort.

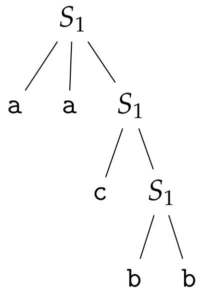
d) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (N, A, S, P)$ mit höchstens 3 Nichtterminalsymbolen (d. h. $|N| \leq 3$) und höchstens 10 Produktionen (d. h. $|P| \leq 10$) an, für die es genau dann $w \in L(G)$ gilt, wenn
- $w \notin L(G_1)$ und
- $w = w'\mathtt{bb}$ für ein $w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{c}\}^*$ ist.

Bemerkung. Es gibt eine solche Grammatik G, die mit lediglich 2 Nichtterminalen und 7 Produktionen auskommt.

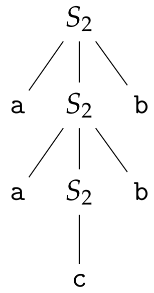
Lösung 7.3

a) Es gibt überhaupt nur nur ein Wort im Durchschnitt, nämlich $w = \mathtt{aacbb}$.

b) G_1:



G_2:



c) $|L(G_1) \cap L(G_2)| = 1$. Denn die von G_2 erzeugten Wörter enthalten genau ein $\mathtt{c}$. Vor einem $\mathtt{c}$ darf bei den von G_1 erzeugten Wörtern aber nur ein Wort aus $\{\mathtt{aa}\}^*$ stehen, was mit G_2 nur mit der Produktion $S_2 \to \mathtt{a}S_2\mathtt{b}$ erzeugen lässt. Es folgt, dass nach dem $\mathtt{c}$ ein Wort aus $\{\mathtt{bb}\}^*$ stehen muss; bei G_1 lässt sich so ein Wort aber ausschließlich durch einmaliges Anwenden der Produktion $S_1 \to \mathtt{bb}$ erzeugen.

d) Da auch G_1 nur Wörter der Form $w'\mathtt{bb}$ mit $w' \in \{\mathtt{a}, \mathtt{c}\}^*$ erzeugt, darf bei den von G erzeugbaren Wörtern das w' nicht aus $\{\mathtt{aa}, \mathtt{c}\}^*$ stammen. D. h. von den „maximal langen reinen a-Blöcken" muss einer ungerade Länge haben. Das klappt z. B. so: $N = \{S, X\}$ und $P = \{S \to \mathtt{aa}S \mid \mathtt{c}S \mid \mathtt{abb} \mid \mathtt{ac}X,\;\; X \to \mathtt{a}X \mid \mathtt{c}X \mid \mathtt{bb}\}$

Aufgabe 7.4 (0.5 + 1.5 + 1 + 1 = 4 Punkte)

In Aufgabe 3.2 haben Sie die Horn-Formeln kennengelernt. In dieser Aufgabe werden wir sehen, wie man sie anhand von kontextfreien Grammatiken definieren kann.

Zur Erinnerung: Es sei $Var_{AL} \subseteq \{\mathtt{Q}_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ein Alphabet aussagenlogischer Variablen, das mindestens $\mathtt{Q}_0$ enthält.[1] Zu einer Menge $M \subseteq For_{AL}$ von aussagenlogischen Formeln sei $V(M) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} V_i(M)$, wobei für $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$V_0(M) = M \qquad \text{und} \qquad V_{i+1}(M) = \{f \wedge g \mid f \in V_i(M), g \in M\}$$

Es bezeichne $\perp$ die unerfüllbare Formel $\mathtt{Q}_0 \wedge \neg\mathtt{Q}_0$ und $\top$ die Tautologie $\mathtt{Q}_0 \vee \neg\mathtt{Q}_0$. Eine *Horn-Klausel* ist eine Formel der Form $(f \rightarrow g)$, die (genau) eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. $f = \top$ und $g \in Var_{AL}$
2. $f \in V(Var_{AL})$ und $g \in Var_{AL}$
3. $f \in V(Var_{AL})$ und $g = \perp$

Für die Menge H der Horn-Klauseln ist dann $V(H)$ die Menge der Horn-Formeln.

a) Es sei K_0 ein Nichtterminalsymbol. Geben Sie eine Menge P_0 von höchstens $2|Var_{AL}| + 1$ Produktionen für K_0 an, sodass die Menge der aus K_0 ableitbaren Wörter genau $V(Var_{AL})$ ist. Sie dürfen dabei in P_0 nur K_0 als Nichtterminalsymbol verwenden.

[1] In Aufgabe 3.2 hießen die Variablen zwar $\mathtt{P}_i$ (statt $\mathtt{Q}_i$), strukturell macht das aber keinen Unterschied aus.

b) Für $i \in \{1, 2, 3\}$ sei K_i ein Nichtterminalsymbol. Geben Sie für jedes K_i jeweils eine Menge P_i von Produktionen an, sodass die aus K_i ableitbaren Wörter genau die Horn-Klauseln sind, die die i-te obere Bedingung erfüllen. Sie dürfen dabei in P_i als einzige Nichtterminalsymbole nur K_0 und K_i benutzen.

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $L(G) = V(H)$ an, für die

$$\{S \to K_1 \mid K_2 \mid K_3\} \cup \bigcup_{i=0}^{3} P_i \subseteq P$$

sowie $N = \{S, K_0, K_1, K_2, K_3\}$ ist. Sie müssen insbesondere nicht nur P, sondern auch T präzise angeben.

d) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum zu G einer konkreten Horn-Formel. Wenden Sie dabei die Nichtterminalsymbole K_1, K_2, und K_3 jeweils mindestens einmal an.

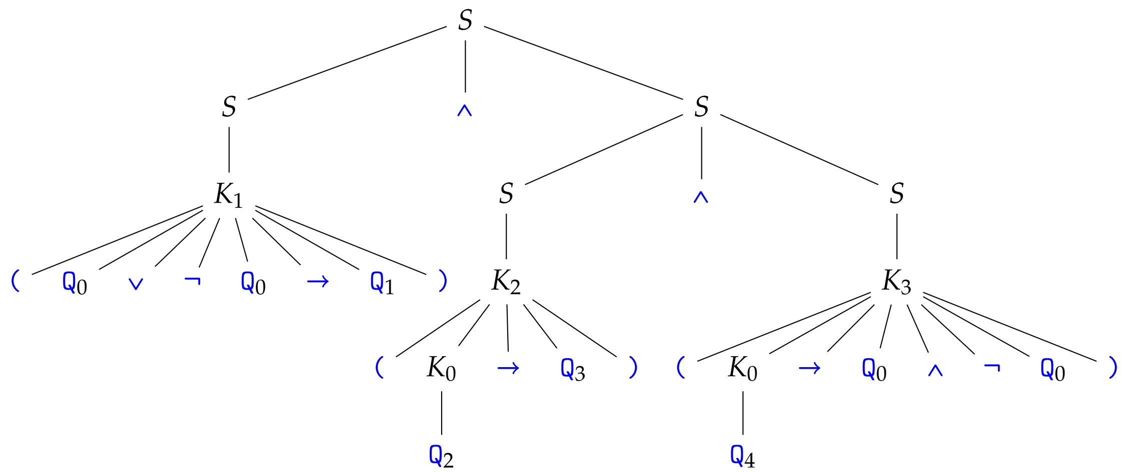
Lösung 7.4

a) $P_0 = \{K_0 \to v \mid v \in Var_{AL}\} \cup \{K_0 \to K_0 \wedge v \mid v \in Var_{AL}\}$

b)
- $P_1 = \{K_1 \to (\top \to v) \mid v \in Var_{AL}\}$
- $P_2 = \{K_2 \to (K_0 \to v) \mid v \in Var_{AL}\} \cup P_0$
- $P_3 = \{K_3 \to (K_0 \to \bot)\} \cup P_0$

c) $T = \{\neg, \wedge, \vee, \to, (,)\} \cup Var_{AL}$ und $P = \{S \to K_1 \mid K_2 \mid K_3 \mid S \wedge S\} \cup \bigcup_{i=0}^{3} P_i$

d)



Aufgabe 7.5 (1 + 1 + 3 = 5 Punkte)
Es sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M. Wir sagen, eine Teilmenge $C \subseteq M$ ist eine R-*Clique*, wenn für jedes x und y aus C gilt: $x\,R\,y$. Für $x \in M$ sei außerdem $R(x) = \{y \in M \mid x\,R\,y\}$. Ferner sei die Relation $R^{-1} \subseteq M \times M$ wie folgt definiert:

$$R^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}$$

a) Gibt es eine Menge M und eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf M, sodass es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine R-Clique C_n der Größe $|C_n| = n$ gibt? Falls ja, geben Sie ein solches M, R, sowie C_n (für jedes $n \in \mathbb{N}_0$) explizit an; andernfalls begründen Sie, warum das nicht der Fall sein kann.
b) Geben Sie alle I_M-Cliquen an, wobei I_M die Identität auf M ist.
c) Es seien jetzt $S, T \subseteq M \times M$ Relationen auf M. Zeigen Sie, dass es aus $T^{-1} \circ T \subseteq S$ folgt, dass $T^{-1}(y)$ für jedes $y \in M$ eine S-Clique ist.

Lösung 7.5
a) Ja, z. B. $M = \mathbb{N}_0$, $R = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, und $C_n = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x < n\}$
b) $\{x\}$, für jedes $x \in M$, und $\varnothing$
c) Es sei $T^{-1} \circ T \subseteq S$ und $y \in M$. Zu zeigen ist, dass $T^{-1}(y)$ eine S-Clique ist. Es seien also $x_1, x_2 \in T^{-1}(y)$. Es folgt $(y, x_1), (y, x_2) \in T^{-1}$ und damit auch $(x_1, y) \in T$. Wegen

$$T^{-1} \circ T = \{(x,z) \in M \times M \mid \exists y \in M : (x,y) \in T \land (y,z) \in T^{-1}\}$$

ist dann $(x_1, x_2) \in T^{-1} \circ T \subseteq S$. Da x_1 und x_2 beliebig waren, so ist also $T^{-1}(y)$ eine S-Clique.
Bemerkung. Die umgekehrte Implikation kann man auch zeigen: Es sei $T^{-1}(y)$ eine S-Clique für jedes $y \in M$ und $(x_1, x_2) \in T^{-1} \circ T$. Dann muss es nach der oberen Gleichung ein $y \in M$ geben, sodass $(x_1, y) \in T$, das heißt, $(y, x_1) \in T^{-1}$ und $(y, x_2) \in T^{-1}$ ist. Es folgt $x_1, x_2 \in T^{-1}(y)$ und, weil dies eine S-Clique ist, so haben wir $(x_1, x_2) \in S$. Da das Paar (x_1, x_2) beliebig war, so folgt $T^{-1} \circ T \subseteq S$.
Die Äquivalenzaussage, die dadurch entsteht, kann z. B. verwendet werden, um zu zeigen, dass es genau dann $T^{-1} \circ T \subseteq \mathrm{I}_M$ gilt, wenn T linkseindeutig (bzw. injektiv, wenn T Abbildung) ist. (Da nach Teilaufgabe b) gilt, dass jede I_M-Clique eine einelementige Menge $\{x\}$ sein muss, wobei $x \in M$ ist.)