Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 8
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: 5. Dezember 2019

Abgabe: 17. Dezember 2019, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 8:	/ 18
Blätter 7 – 8:	/ 39

Aufgabe 8.1 **(1 + 1 + 1 = 3 Punkte)**
Es sei $F = \forall x\, \exists y\, R(x,y)$. Geben Sie für jede der folgenden prädikatenlogischen Formeln G_i und $i \in \{1,2,3\}$ an, ob G_i und F logisch äquivalent sind. Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. eine konkrete Wahl einer Interpretation (D_i, I_i) und einer Variablenbelegung β_i an, für die $val_{D_i,I_i,\beta_i}(F) \neq val_{D_i,I_i,\beta_i}(G_i)$ ist.

a) $G_1 = \exists y\, \forall x\, R(x,y)$ b) $G_2 = \forall y\, \exists x\, R(y,x)$ c) $G_3 = \forall y\, \exists x\, R(x,y)$

Lösung 8.1

a) G_1 und F sind **nicht** äquivalent. Es sei z. B. $D_1 = \mathbb{N}_0$, $I_1(R) = \leq$, und β_1 beliebig. Das ist dann Modell von F (setze $y = x$), aber kein Modell von G_1 (setze $x = y + 1$).
b) G_2 und F sind äquivalent. G_2 erhält man, indem man die Variablen x und y vertauscht. (In der Vorlesung bzw. Übung haben Sie das als „gebundene Umbenennung“ kennengelernt.) Das erhält die Bedeutung von F (bzgl. jeder Domäne, Interpretation, und Variablenbelegung).
c) G_3 und F sind **nicht** äquivalent. Es sei z. B. $D_3 = \mathbb{N}_0$, $I_3(R) = <$, und β_3 beliebig. Das ist Modell von F (setze $y = x + 1$), aber kein Modell von G_3 (setze $y = 0$).

Aufgabe 8.2 **(1.5 + 1.5 + 2 = 5 Punkte)**
Es sei S ein einstelliges Relationssymbol, und für $i \in \{1,2,3\}$ sei R_i ein zweistelliges Relationssymbol sowie F_i die prädikatenlogische Formel

$$F_i : \quad \exists x\, \forall y\, (R_i(x,y) \to S(y))\,.$$

Es sei $A = \{a, b\}$. Für jedes $w \in A^+$ und jedes i wird eine Interpretation (D_w, I_w) durch $D_w = \mathbb{Z}_{|w|}$, $I_w(S) = \{y \in D \mid w(y) = a\}$, und $I_w(R_i)$ wie folgt festgelegt:

a) $I_w(R_1) = \{(x,y) \in D \times D \mid x \neq y\}$ b) $I_w(R_2) = \{(x,y) \in D \times D \mid x \leq y\}$

c) $I_w(R_3) = \{(x,y) \in D \times D \mid x + y \text{ gerade}\}$

Da die Formeln F_i keine freien Variablen enthalten, kann eine Variablenbelegung β beliebig gewählt werden.

Geben Sie für jedes i jeweils die Sprache $L_i \subseteq A^*$ explizit an, die genau jedes Wort $w \in A^+$ enthält, für das $val_{D_w,I_w,\beta}(F_i) = \mathbf{w}$ ist.

Lösung 8.2

a) „An jeder Stelle außer höchstens einer steht ein a“:
$L_1 = \{a\}^+ \cup \{a\}^*\{b\}\{a\}^*$
b) „Im Wort gibt es ein a und ab irgendeinem a im Wort steht rechts davon an jeder Stelle ein a“ oder „Das Wort endet mit a.“
$L_2 = \{a, b\}^*\{a\}^+ = \{a, b\}^*\{a\}$
c) die Wörter mit der Eigenschaft: an allen geraden Stellen steht ein a oder an allen ungeraden Stellen steht ein a (oder beides)
Hinweis: Wenn z. B. an allen geraden Stellen ein a steht, dann darf immer noch auch an ein paar ungeraden Stellen ein a stehen, etc.
formal: $L_3 = \{\varepsilon, a, b\} \cdot (\{a\} \cup \{aa, ab\}^+\{a, \varepsilon\})$

Aufgabe 8.3 (2 + 1.5 + 1.5 + 1 = 6 Punkte)
Gegeben seien die folgenden prädikatenlogischen Formeln:

$$F = \forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(x,x)} \quad \text{und} \quad G = \forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{R(x,y)} \wedge \mathtt{R(y,z)} \rightarrow \mathtt{R(x,z)})$$

a) Geben Sie ein Modell für G (also eine Interpretation (D, I), sodass $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$ für jede Variablenbelegung β ist) an, das aber nicht Modell von F ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
b) Gibt es eine Domäne D, sodass $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{w}$ für jede Interpretation (D', I) mit $D' = D$ und beliebige Variablenbelegung β gilt? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. D an.
c) Gibt es eine Domäne D, sodass $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$ für jede Interpretation (D', I) mit $D' = D$ und beliebige Variablenbelegung β gilt? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. D an.
d) Ist F bzw. G allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 8.3

a) Für jede Domäne D, Interpretation I, und Variablenbelegung β gilt $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{w}$ genau dann, wenn die Relation $I(\mathtt{R})$ reflexiv ist. Analog ist $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$ gdw. $I(\mathtt{R})$ transitiv ist. Man kann also z. B. $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{R}) = <$, und β beliebig wählen.
Es geht auch $D \neq \{\}$ beliebig und $I(\mathtt{R}) = \{\}$.
b) Nein. D ist eine nichtleere Menge, also es enthält insbesondere ein Element $x \in D$. Wählt man $I(\mathtt{R}) = \varnothing$ (also die leere Relation), so ist $(x, x) \notin \varnothing$ und es folgt $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{f}$.
c) Ja. Es sei $|D| = 1$, $D = \{x\}$, und $R = I(\mathtt{R}) \subseteq D \times D$. Gilt $(x, x) \in R$, so ist damit $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$ (weil $y = z = x$ gelten muss), weil beide Seiten der Implikation in G wahr werden. Ist $(x, x) \notin R$, dann müssen beide Seiten der Implikation falsch sein, was auch zu $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$ führt.
d) F ist nicht allgemeingültig; in b) wurde ein Gegenbeispiel explizit angegeben. G ist ebenfalls nicht allgemeingültig; ist $|D| \geq 2$, so gibt es immer mindestens eine Relation auf D, die nicht transitiv ist (z. B. $D = \{x, y\}$ und $R = \{(x, y)\}$).
Achtung: Bei Allgemeingültigkeit geht es *immer* um *alle* D und *alle* I.

Aufgabe 8.4 (1 + 1.5 + 1.5 = 4 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden prädikatenlogischen Formeln:

$$F_1 = \mathtt{R(x)} \rightarrow \exists \mathtt{y}\, (\mathtt{R(y)} \wedge \mathtt{S(x,y)} \wedge \mathtt{T(z)}) \quad \text{und} \quad F_2 = (\mathtt{T(y)} \wedge \neg \mathtt{S(x)} \wedge \forall \mathtt{y}\, \mathtt{R(y)}) \rightarrow \forall \mathtt{y}\, \mathtt{T(y)}$$

a) Geben Sie $\mathrm{fv}(F_i)$ und $\mathrm{bv}(F_i)$ für $i \in \{1, 2\}$ explizit an.
b) Gibt es eine Substitution σ_1, die nicht kollisionsfrei für F_1 ist? Falls ja, geben Sie ein solches σ_1 an; andernfalls begründen Sie, warum es kein solches σ_1 geben kann.
c) Gibt es eine Substitution σ_2, die nicht kollisionsfrei für F_2 ist? Falls ja, geben Sie ein solches σ_2 an; andernfalls begründen Sie, warum es kein solches σ_2 geben kann.

Lösung 8.4

a)

- $\text{fv}(F_1) = \{\texttt{x}, \texttt{z}\}$
- $\text{bv}(F_1) = \{\texttt{y}\}$

- $\text{fv}(F_2) = \{\texttt{x}, \texttt{y}\}$
- $\text{bv}(F_2) = \{\texttt{y}\}$

b) Ja, z. B. $\sigma_1 = \sigma_{\{\texttt{x}/\texttt{y}\}}$

c) Nein, weil eine Substitution nur das erste Vorkommen der Variable $\texttt{x}$ bzw. $\texttt{y}$ ersetzen wird, und beide sind nicht im Wirkungsbereich eines Quantors, also kann auch keine Kollision passieren.
Achtung: die gebundenen Vorkommen von $\texttt{y}$ in F_2 werden *niemals* substituiert.