Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 9

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: 13. Dezember 2019

Abgabe: 7. Januar 2020, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 9:	/ 20
Blätter 7 – 9:	/ 59

Aufgabe 9.1 (2 + 2 = 4 Punkte)

a) Geben Sie einen Homomorphismus $h\colon A_{For}^* \to A_{For}^*$ mit $h(L_{For}) \subseteq L_{For}$ sowie (legale) prädikatenlogische Formeln F und G mit $h(F) = G$ an, für die für jede Substitution $\sigma\colon L_{For} \to L_{For}$ gilt: $\sigma(F) \neq G$.

b) Angenommen, h dürfte nur Variablen verändern, das heißt, es würde zusätzlich noch $h(x) = x$ für $x \in A_{For} \setminus Var_{PL}$ gelten. Würden in diesem Fall auch noch F, G, und h mit den Eigenschaften aus a) existieren? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. solche F, G, und h an.

Aufgabe 9.2 (1 + 1.5 + 3 + 1.5 = 7 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Für $w \in A^*$ und $x \in A$ seien die Abbildungen $\mathrm{car}, \mathrm{cdr}\colon A^* \to A^*$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathrm{car}(\varepsilon) &= \varepsilon & \qquad \mathrm{cdr}(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \mathrm{car}(xw) &= x & \qquad \mathrm{cdr}(xw) &= w \end{aligned}$$

a) Was sind $\mathrm{cdr}(\mathrm{car}(w))$ und $\mathrm{car}(\mathrm{cdr}(w))$, wenn $w \in A^*$ beliebig ist?

Es sei jetzt folgender Algorithmus B gegeben, der $z \in A^*$ als Eingabe bekommt und mit Variablen w, x, und y arbeitet, wobei der Wertebereich aller drei Variablen gleich A^* sei:

$w \leftarrow z$
$x \leftarrow \varepsilon$
$y \leftarrow \varepsilon$
while $w \neq \varepsilon$ **do**
  $x \leftarrow x \cdot \mathrm{car}(w)$
  if $\mathrm{car}(w) \neq \mathtt{a}$ **then**
    $y \leftarrow y \cdot \mathrm{car}(w)$
  else
    $y \leftarrow y$
  fi
  $w \leftarrow \mathrm{cdr}(w)$
od

Dabei sind ε und $\mathtt{a}$ Konstantensymbole, die stets mit den offensichtlichen Werten aus A^* interpretiert werden.

b) Für $i \in \mathbb{N}_+$ bezeichne w_i, x_i, bzw. y_i den Wert der Variable w, x, bzw. y unmittelbar nach der i-ten Ausführung (falls es eine gibt) der **while**-Schleife in B. Führen Sie B für $z = \mathtt{abac}$ aus und geben Sie w_i, x_i, und y_i für jedes $i \in \mathbb{N}_+$ tabellarisch an. Wird die Schleife echt weniger als i-mal ausgeführt, so müssen Sie nichts angeben.

c) Geben Sie einen Homomorphismus $h\colon A^* \to A^*$ an, so dass die Zusicherung

$$y = h(x) \wedge x \cdot w = z$$

bzgl. der **while**-Schleife in B invariant ist. Zeigen Sie anschließend mittels des Hoare-Kalküls, dass diese Zusicherung für Ihre Wahl von h tatsächlich eine Schleifeninvariante ist. Sie dürfen dabei ohne Beweis benutzen, dass $\mathrm{car}(w) \cdot \mathrm{cdr}(w) = w$ für jedes $w \in A^*$ ist.

Tipp. Gehen Sie von unten nach oben vor und beschäftigen Sie sich *erst* mit dem **then**-Zweig und *danach* mit dem **else**-Zweig.

d) Welche Werte haben die Variablen w, x, und y nach Ausführung von B im Allgemeinen?

Aufgabe 9.3 (1.5 + 0.5 + 1 + 4 + 2 = 9 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie folgenden Algorithmus A, dessen Variablen y und i heißen und Wertebereich $\mathbb{N}_0$ haben:

$$
\begin{array}{l}
y \leftarrow f(0) \\
i \leftarrow 0 \\
\textbf{while } i < n \textbf{ do} \\
\quad i \leftarrow i + 1 \\
\quad y \leftarrow y + f(i) \\
\textbf{od}
\end{array}
$$

Für $j \in \mathbb{N}_+$ sei y_j bzw. i_j der Wert der Variable y bzw. i nach der j-ten Ausführung (falls es eine gibt) der **while**-Schleife von A.

a) Führen Sie A für die Eingabe $n = 4$ aus, wobei die Interpretation von f die Abbildung mit $f(x) = 2x$ sei. Geben Sie y_j und i_j für jedes $j \in \mathbb{N}_+$ tabellarisch an. Wird die Schleife echt weniger als j-mal ausgeführt, so müssen Sie nichts angeben.

b) Wie oft wird die **while**-Schleife von A für beliebige Eingabe n ausgeführt?

c) Welcher Wert hat die Variable y nach Ausführung von A, wenn $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und $f = \mathrm{I}_{\mathbb{N}_0}$ ist?
Erinnerung. Für eine Menge M ist $\mathrm{I}_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$.

d) In dieser Teilaufgabe geht es darum, die Gültigkeit des Hoare-Tripels

$$T: \quad \{0 = 0\}\ A\ \{y = \sum_{j=0}^{n} f(j)\}$$

zu beweisen.

- Geben Sie eine Invariante I für die **while**-Schleife von A an. Ihre Invariante muss dabei so stark sein, dass sie in einem Beweis im Hoare-Kalkül eine wesentliche Rolle spielen kann, um die Gültigkeit von T zu zeigen.
- Zeigen Sie im Hoare-Kalkül, dass Ihr I tatsächlich eine Schleifeninvariante ist.
- Zeigen Sie im Hoare-Kalkül, dass $\{0 = 0\}\ y \leftarrow f(0);\ i \leftarrow 0\ \{I\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist.
- Zeigen Sie, dass $I \wedge \neg(i < n)$ die Zusicherung $y = \sum_{j=0}^{n} f(j)$ impliziert.

Tipp. Achten Sie darauf, dass „$\wedge\, i \leq n$“ Bestandteil ihrer Invariante I ist.

e) Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck an, der bei jeder Ausführung der **while**-Schleife von A echt kleiner wird. Folgern Sie anschließend daraus, dass A für beliebiges n und f stets terminiert.