Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
18. März 2020

Nachname:							
Vorname:							
Matr.-Nr.:							

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Falls 2. Versuch, bitte `sehr gut lesbar` ausfüllen:

Email-Adr.:	
Postanschrift:	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	5	7	7	5	7	7	6
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 44		Note:	

/ 5

Aufgabe 1 (3 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Es sei das Wort $w = \mathtt{a}^2\mathtt{b}^1\mathtt{c}^3\mathtt{d}^3\mathtt{e}^1$ gegeben.

/ 3

a) Zeichnen Sie einen Huffman-Baum B_w zu w.

/ 1

b) Es sei C_w die Codierung von w anhand des Codes, der aus B_w abzulesen ist. Was ist $|C_w|$? Antwort: $|C_w| = \boxed{}$

/ 1

c) Es sei A ein Alphabet und $w' \in A^+$ beliebig. Welcher Wert steht in der Wurzel jedes Huffman-Baumes $B_{w'}$ zu w'? Begründen Sie Ihre Antwort.

/ 7 **Aufgabe 2 (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)**

/ 2

a) Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Geben Sie zwei *unendliche* formale Sprachen $L_1 \subseteq A^*$ und $L_2 \subseteq A^*$ an, für die gilt:

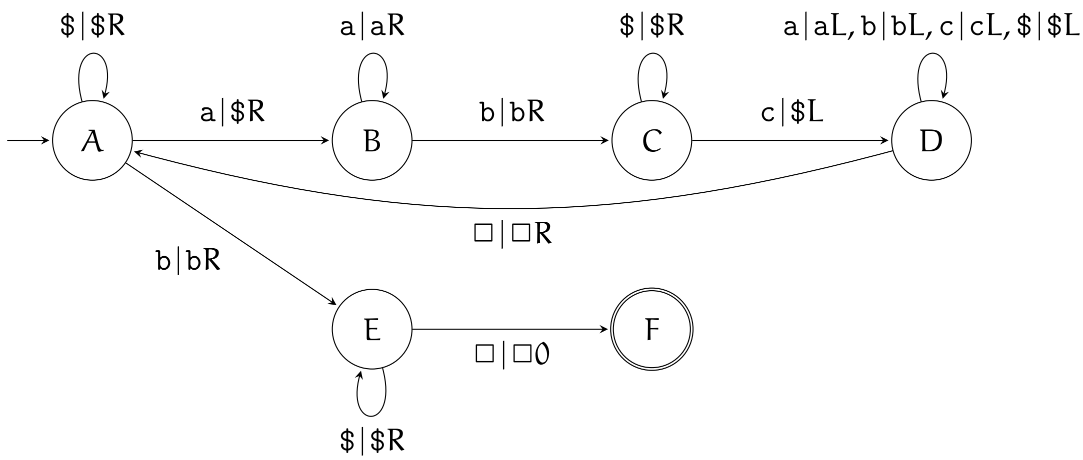
(i) $L_1 \neq L_2$ und (ii) $L_1 L_2 = L_2 L_1$ und (iii) $L_1 L_2 L_1 \neq L_2 L_1 L_2$.

$L_1 =$

$L_2 =$

/ 2

b) Geben Sie die Sprache an, die von folgender Turing-Maschine T mit Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ und Bandalphabet $Y = X \cup \{\$, \square\}$ erkannt wird:



$L(T) =$

/ 3

c) Beweisen Sie die folgenden Aussagen im O-Kalkül:

(i) $3^{n+5} \in \Theta(3^n)$ (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^4 \in O(n^5)$ (iii) $\sum_{k=1}^{n} k^4 \in \Omega(n^5)$

Hinweis. Sie dürfen in Ihrem Beweis zu (iii) annehmen, dass $n/2$ eine ganze Zahl ist.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

/ 7

Aufgabe 3 (1 + 1 + 2 + 3 = 7 Punkte)

Es sei $\mathit{Var}_{\mathrm{AL}}$ ein Alphabet aussagenlogischer Variablen. Die Elemente von $L = \mathit{Var}_{\mathrm{AL}} \cup \{\neg v \mid v \in \mathit{Var}_{\mathrm{AL}}\}$ heißen *Literale*. Eine *2-KNF Klausel* ist ein Element aus $K = \{(\ell_1 \vee \ell_2) \mid \ell_1, \ell_2 \in L\}$. Eine *2-KNF Formel* ist ein Element aus $V(K)$, wobei $V(K) = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i(K)$ ist und $V_i(K)$ für $i \in \mathbb{N}_0$ wie folgt induktiv festgelegt ist:

$$V_0(K) = K, \qquad V_{i+1}(K) = \{f \wedge k \mid f \in V_i(K), k \in K\}$$

/ 1

a) Es seien $F, G \in \mathit{For}_{\mathrm{AL}}$ beliebige aussagenlogische Formeln über $\mathit{Var}_{\mathrm{AL}}$. Wann heißen F und G *logisch äquivalent*?

/ 1

b) Es sei $\mathit{Var}_{\mathrm{AL}} = \{\mathtt{P}, \mathtt{Q}\}$ und $F = (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}$. Geben Sie eine 2-KNF Formel $G \in V(K)$ an, die zu F logisch äquivalent ist:

$G =$

Es sei nun $\mathit{Var}_{\mathrm{AL}}$ wieder beliebig.

/ 2

c) Geben Sie explizit die Menge $K' \subseteq K$ aller 2-KNF *Klauseln* an, die Tautologien sind:

$K' =$

Achten Sie darauf, dass Ihr K' *alle* solche Klauseln enthält, auch wenn manche logisch äquivalent sind.

/ 3

d) Zeigen Sie, dass eine Formel $T \in V(K)$ genau dann eine Tautologie ist, wenn $T \in V(K')$ ist (d. h., jede 2-KNF Klausel von T ist ein Element aus K', wobei K' die Menge aus Teilaufgabe c) ist).

Hinweis: Sie müssen nicht mehr zeigen, dass Ihr K' die in Teilaufgabe c) verlangte Eigenschaft hat.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 5

Aufgabe 4 (1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um gerichtete Graphen $G = (V, E)$ (mit endlicher Knotenmenge V).

Zur Erinnerung: Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist E^k die Relation auf V, die alle Knotenpaare (x, y) enthält, für die gilt: Es gibt einen Pfad in G der Länge k von x nach y.

/ 1

a) Geben Sie eine induktive Definition aller Relationen E^k mit $k \in \mathbb{N}_0$ an.

/ 1

b) Geben Sie (als Bild oder formal) einen Graphen an, bei dem mindestens eine, aber nur endliche viele Relationen E^k nicht leer sind.

/ 1

c) Geben Sie (als Bild oder formal) einen Graphen an, bei dem nur endliche viele Relationen E^k leer sind.

/ 2

d) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Graphen, bei dem unendliche viele der Relationen E^k leer sind und unendlich viele nicht leer.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

/ 7 **Aufgabe 5 (1 + 2 + 4 = 7 Punkte)**

Es sei $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Ferner sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N = \{S, X, Y\}$ und

$$P = \{\ S \to X\mathtt{aab}Y,\quad X \to \mathtt{ab}X \mid \varepsilon,\quad Y \to \mathtt{a}Y \mid \varepsilon\ \}.$$

/ 1

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, sodass $\langle R \rangle = L(G)$ ist:

$R =$

/ 2

b) Geben Sie eine *rechtslineare* Grammatik $G' = (N', T, S', P')$ mit höchstens 3 Nichtterminalsymbolen (d. h. $|N'| \leq 3$) an, für die $L(G') = L(G)^*$ ist.

/ 4

c) Es sei $L = \{w \in (N \cup T)^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_+ : S \Rightarrow^n w\}$ sowie $f\colon L \to \mathbb{R}_0^+$ die Abbildung mit

$$f(w) = \frac{N_{\mathtt{b}}(w)}{N_{\mathtt{a}}(w)}$$

für jedes $w \in L$, wobei $N_x(w)$ die Anzahl Vorkommen des Symbols $x \in T$ in w bezeichne.

Zeigen Sie, dass $f(w) \leq 1$ für jedes $w \in L$ ist. Verwenden Sie vollständige Induktion über die Anzahl Ableitungsschritte, die G benötigt, um w zu erzeugen (also $n \in \mathbb{N}_+$ mit $S \Rightarrow^n w$). Der Induktionsanfang soll $n = 1$ sein.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

/ 7

Aufgabe 6 (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

Es sei $A = \{a, b\}$. Für $w \in A^*$ und $x \in A$ sei $N_x(w)$ die Zahl der Vorkommen von Symbol x in Wort w.

Es sei L die formale Sprache aller Wörter $w \in A^*$ mit der Eigenschaft, dass für jedes Präfix v von w gilt: $-1 \leq N_a(v) - N_b(v) \leq 1$.

/ 2

a) Geben Sie für jedes der folgenden Wörter w jeweils für alle Längen $0 \leq k \leq |w|$ eines Präfix v den Wert $N_a(v) - N_b(v)$ an. Tragen Sie die Werte in die folgende Tabelle ein. Einen Wert haben wir schon als Beispiel eingetragen.

	Länge des Präfix							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$w = \texttt{abbaaba}$				-1				
$w = \texttt{baaabba}$								

/ 3

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit höchstens 5 Zuständen an, der genau L akzeptiert.

Für $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $c \leq d$ sei nun $L(c, d)$ die formale Sprache aller Wörter $w \in A^*$ mit der Eigenschaft $w \in L$ und $c \leq N_a(w) - N_b(w) \leq d$.

/ 2

c) Angenommen, man darf an Ihrem Akzeptor aus Teilaufgabe b) *ausschließlich* die Menge akzeptierender Zustände F ändern. (D. h., die Zustandsmenge, der Startzustand und sämtliche Zustandsübergänge bleiben dieselben.) Gibt es für die folgenden Werte von c und d dann eine Menge $F(c, d)$ akzeptierender Zustände, sodass Ihr Automat *genau* die Sprache $L(c, d)$ akzeptiert?

Falls ja, geben Sie eine solche Menge $F(c, d)$ an; andernfalls begründen Sie, warum das nicht der Fall sein kann:

(i) $c = 0, d = 0$ (ii) $c = 0, d = 1$ (iii) $c = 0, d = 2$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

/ 6

Aufgabe 7 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Turing-Maschinen, deren Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ ist und die *für jede Eingabe* anhalten.

Eine Sprache $L \subseteq X^*$ heißt *trivial*, wenn $L = \varnothing$ oder $L = X^*$ ist.

/ 2

a) Geben Sie eine Turing-Maschine T_1 mit höchstens 3 Zuständen an, sodass $L(T_1)$ nicht trivial ist und für die Zeitkomplexität Time_{T_1} von T_1 gilt: $\mathrm{Time}_{T_1}(n) \in \Theta(n)$.

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

/ 2

b) Ist T_2 eine Turing-Maschine mit Zeitkomplexität $\mathrm{Time}_{T_2}(n) \in \Theta(1)$, so ist entweder $L(T_2)$ oder $X^* \setminus L(T_2)$ endlich.

/ 2

c) Ist T_3 eine Turing-Maschine und ist $L(T_3)$ trivial, dann gilt $\mathrm{Time}_{T_3}(n) \in O(1)$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: