

Klausur zur Vorlesung Grundbegriffe der Informatik 3. September 2020

Nachname:							
Vorname:							
Matr.-Nr.:							

Diese Klausur ist mein 1. Versuch 2. Versuch in GBI

Falls 2. Versuch, bitte sehr gut lesbar ausfüllen:

Email-Adr.:
Postanschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	7	6	6	9	6	6	5
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 45
------------------	------

Note:	
-------	--



/ 7

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)

/ 1

- a) Geben Sie (formal oder als Bild) einen streng zusammenhängenden und gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit mindestens 4 Knoten (also $|V| \geq 4$) an, dessen Anzahl Kanten *minimal* ist (d. h., ist $G' = (V', E')$ ebenfalls ein streng zusammenhängender und gerichteter Graph mit $|V'| = |V|$, dann ist $|E'| \geq |E|$):

/ 1

- b) Es sei $X = \{a, b\}$. Wie viele Sprachen $L \subseteq X^*$ gibt es, sodass L^* endlich ist? Wenn Ihre Antwort eine endliche Zahl ist, geben Sie noch alle solchen Sprachen an.

/ 1

- c) Gegeben sei die Grammatik $G = (N, T, X, P)$ mit $N = \{X, Y\}$, $T = \{a, b\}$, und $P = \{X \rightarrow aYb, Y \rightarrow aY, Y \rightarrow \varepsilon\}$. Geben Sie Produktionen p_1 und p_2 an, sodass die Grammatik $G' = (N, T, X, P')$ mit $P' = P \cup \{p_1, p_2\}$ die Sprache $L(G') = \{a\}^* \cdot \{b\}^*$ erzeugt:

$p_1 =$

$p_2 =$

/ 2

- d) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache aller Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$ beschreibt, für die gilt: „Vor jedem b steht höchstens ein a und nach jedem b steht höchstens ein weiteres b .“

$R =$

/ 2

- e) Es sei $\text{id}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ die Abbildung mit $\text{id}(n) = n$. Geben Sie zwei Funktionen $f, g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ an, für die gilt:

1. $f \notin \Theta(\text{id})$, 2. $g \notin \Theta(\text{id})$, 3. $g \notin \Theta(f)$, und 4. $f \circ g \in \Theta(g \circ f)$.

Begründen Sie kurz, warum Bedingung 4. erfüllt ist.

$f(n) =$

$g(n) =$

Begründung:

/ 6

Aufgabe 2 (1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Es sei $A = \{a, b\}$. Zudem sei $d: A^* \times A^* \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Abbildung, die für alle $u, v \in A^*$ und $x, y \in A$ wie folgt induktiv definiert ist:

$$d(u, \varepsilon) = d(\varepsilon, v) = 0 \quad \text{und} \quad d(xu, yv) = \begin{cases} 1 + d(u, v), & \text{falls } x = y \\ d(u, v), & \text{sonst} \end{cases}.$$

/ 1

a) Berechnen Sie schrittweise $d(abab, bbbb)$:

Es sei nun $n \in \mathbb{N}_0$. Zudem sei für $r \in \mathbb{N}_0$ und $w \in A^n$ die Menge $B_r(w)$ wie folgt definiert:

$$B_r(w) = \{w' \in A^n \mid d(w, w') \leq r\}$$

Hinweis. Die w' in $B_r(w)$ haben die gleiche Länge wie w .

/ 1

b) Geben Sie alle Wörter in $B_2(bba)$ explizit an:

/ 2

c) Es seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $w \in A^n$ beliebig. Geben Sie alle $w' \in B_0(w)$ an:

Es seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ beliebig und C eine Abbildung $C: A^m \rightarrow A^n$.

/ 1

d) Welcher Beziehung besteht zwischen m und n , wenn C eine bijektive Abbildung ist?

Es sei nun $C: A^m \rightarrow A^n$ eine bijektive Abbildung. Eine zugehörige Relation $D \subseteq A^n \times A^m$ sei wie folgt gegeben: $(w, w') \in D$ gdw. $w \in B_0(C(w'))$

/ 1

e) Welche der vier folgenden Eigenschaften

1. linkstotal, 2. rechtstotal, 3. linkseindeutig, 4. rechtseindeutig

hat D :

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

/ 6

Aufgabe 3 (3 + 3 = 6 Punkte)

/ 3

a) Gegeben Seien die folgenden aussagenlogischen Formeln mit den aussagenlogischen Variablen P, Q, und R:

- $F_1: P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
- $F_2: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
- $F_3: (P \rightarrow Q) \rightarrow R$

Geben Sie für $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ jeweils an, ob F_i und F_j logisch äquivalent sind. Sollte das *nicht* der Fall sein, geben Sie noch eine Interpretation I an, für die $val_I(F_i) \neq val_I(F_j)$ gilt.

$F_1, F_2:$

$F_1, F_3:$

$F_2, F_3:$

/ 3

b) Zeigen oder widerlegen Sie:

- Ist eine Formel F entweder eine Tautologie oder unerfüllbar, so ist $F \rightarrow F$ eine Tautologie.
- Ist eine Formel F entweder eine Tautologie oder unerfüllbar, so ist $(F \vee F) \rightarrow (F \wedge F)$ eine Tautologie.
- Eine Formel F ist genau dann unerfüllbar, wenn $(\neg F) \rightarrow F$ eine Tautologie ist.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 9

Aufgabe 4 (2 + 2 + 1 + 4 = 9 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um gerichtete Graphen $G = (V, E)$ (mit endlicher Knotenmenge V).

Zur Erinnerung: Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist E^k die Relation auf V , die alle Knotenpaare (x, y) enthält, für die gilt: Es gibt einen Pfad in G der Länge k von x nach y .
Formal also:

$$E^0 = \{(x, x) \mid x \in V\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0: E^{k+1} = \{(x, z) \mid \exists y \in V: (x, y) \in E^k \text{ und } (y, z) \in E\}$$

Ferner sei für $k \in \mathbb{N}_0$ der Graph G^k durch $G^k = (V, E^k)$ definiert.

/ 2

- a) Es sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$ sowie $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 4)\}$. Geben Sie G^0 , G^1 , G^2 , und G^3 an (als Bilder oder formal). Beschriften Sie alle Knoten.

Es sei nun $G = (V, E)$ ein *beliebiger* gerichteter Graph.

/ 2

- b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Einträgen in den Wegematrizen von G und G^2 ? Begründen Sie Ihre Antwort.

/ 1

- c) Geben Sie (als Bild oder formal) einen *streng zusammenhängenden* Graphen H an, sodass es keinen Graphen J mit $H = J^2$ gibt. Begründen Sie Ihre Antwort.

/ 4

- d) Es sei $m \in \mathbb{N}_+$ so gewählt, dass der Ausgangsgrad jedes Knotens $x \in V$ kleiner oder gleich m ist. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$: In G^k ist der Ausgangsgrad jedes Knotens höchstens m^k .

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

/ 6

Aufgabe 5 (1 + 1 + 1 + 3 = 6 Punkte)

Es sei $A = \{a, b\}$ und $G = (N, A, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N = \{S, X, Y\}$ und

$$P = \{S \rightarrow aXb \mid aaS \mid Yb, \\ X \rightarrow aSb, \\ Y \rightarrow Sb \mid b\}.$$

/ 1

a) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum für ein Wort $w \in L(G)$ der Länge $|w| \geq 6$.

/ 1

b) Geben Sie eine *rechtslineare* Grammatik $G' = (N', A, S', P')$ mit höchstens 2 Nichtterminalsymbolen (also $|N'| \leq 2$) an, sodass $L(G) = L(G')$ ist.

/ 1

c) Wann heißt eine Abbildung $h: A^* \rightarrow A^*$ ein *Homomorphismus*?

/ 3

d) Gibt es einen endlichen Akzeptor E sowie einen Homomorphismus $h: A^* \rightarrow A^*$, sodass $w \in L(E)$ genau dann gilt, wenn $h(w) \in L(G)$ ist?

Falls ja: Geben Sie solche E und h an.

Falls nein: Begründen Sie, warum das nicht der Fall sein kann.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

/ 6

Aufgabe 6 (2 + 1 + 1 + 2 = 6 Punkte)

Es sei $A = \{a, b\}$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A^{\leq n} = \bigcup_{i=0}^n A^i$.

Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen endlichen Automaten B_n wie folgt:

- die Zustandsmenge Q ist gleich $A^{\leq n}$
- der Startzustand ist ε
- das Eingabealphabet ist A
- die Zustandsübergangsfunktion $f: Q \times A \rightarrow Q$ ist für $w \in A^*$ und $x \in A$ wie folgt festgelegt:

$$f(w, x) = \begin{cases} wx, & \text{falls } |w| < n \\ w, & \text{falls } |w| = n \end{cases}$$

/ 2

- a) Zeichnen Sie B_0 , B_1 , und B_2 . Kennzeichnen Sie den Startzustand deutlich und beschriften Sie alle Zustände und Zustandsübergänge.

Hinweis. Gehen Sie für diese Teilaufgabe davon aus, dass es *keine* akzeptierenden Zustände gibt.

/ 1

- b) Wie viele Zustände besitzt B_n in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$? In Ihrer Antwort darf kein \sum -Zeichen vorkommen.

Antwort:

Hinweis. In den beiden letzten Teilaufgaben geht es nun auch um akzeptierende Zustände.

/ 1

- c) Geben Sie für den Automaten B_2 , den Sie in Teilaufgabe a) angegeben haben, eine Menge akzeptierender Zustände $F \subseteq Q$ an, sodass $L(B_2)$ gleich der Sprache aller Wörter ist, die entweder mit einem a oder mit bb anfangen: $F =$

/ 2

- d) Es sei $n \geq 1$ und es seien C und D endliche Akzeptoren, die vom Aufbau her zu B_n identisch sind. Die Menge akzeptierender Zustände von C heiße $F_C \subseteq Q$ und die Menge akzeptierender Zustände von D heiße F_D .

Angenommen, es ist $F_D = F_C \cup \{q\}$ für einen Zustand $q \in Q = A^{\leq n}$, und angenommen, R_C ist ein regulärer Ausdruck, sodass $\langle R_C \rangle = L(C)$ ist.

Beschreiben Sie den Aufbau eines regulären Ausdrucks R_D , sodass $\langle R_D \rangle = L(D)$ ist.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

/ 5

Aufgabe 7 (2 + 2 + 1 = 5 Punkte)

Es sei T eine Turing-Maschine mit Zustandsmenge Q , Bandalphabet Y , Eingabealphabet $X \subseteq Y \setminus \{\square\}$, und Zustandsüberföhrungsfunktion f . Ferner sei $F \subseteq Q$ die Menge akzeptierender Zustände von T .

/ 2

a) Vervollständigen Sie die Definitionen:

• f ist eine Funktion

mit Definitionsbereich gleich

und Bildbereich gleich .

Angenommen, T befindet sich aktuell im Zustand $q \in Q$ und liest das Symbol $y \in Y$.

• Man sagt, T hat *angehalten*,

wenn .

• Man sagt, T hat *akzeptiert*,

wenn

und .

/ 2

b) Es sei S eine Turing-Maschine mit gleichem Q , Y und f wie bei T , aber die Menge akzeptierender Zustände von S sei gleich $F' = Q \setminus F$. (F ist die Menge akzeptierender Zustände von T .)

Zeigen oder widerlegen Sie: Dann gilt stets $L(S) = X^* \setminus L(T)$.

/ 1

c) Zusätzlich zu den Annahmen aus Teilaufgabe b) gelte nun auch noch: Der Schreib-Lese-Kopf von T bewegt sich nur nach rechts (oder T hält an).

Zeigen oder widerlegen Sie: Dann gilt stets $L(S) = X^* \setminus L(T)$.

Hinweis. Wenn Sie beide Behauptungen aus b) und c) widerlegen, müssen Sie nicht dieselben Maschinen T und S bei beiden Teilaufgaben verwenden, aber Sie dürfen.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: