Lösungsvorschläge und Erläuterungen

Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
18. März 2020

Nachname:							
Vorname:							
Matr.-Nr.:							

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Falls 2. Versuch, bitte `sehr gut lesbar` ausfüllen:

Email-Adr.:
Postanschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	5	7	7	5	7	7	6
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 44	Note:	

/ 5

Aufgabe 1 (3 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Es sei das Wort $w = \mathtt{a}^2\mathtt{b}^1\mathtt{c}^3\mathtt{d}^3\mathtt{e}^1$ gegeben.

/ 3

a) Zeichnen Sie einen Huffman-Baum B_w zu w.

/ 1

b) Es sei C_w die Codierung von w anhand des Codes, der aus B_w abzulesen ist. Was ist $|C_w|$?

Antwort: $|C_w| =$ 22

/ 1

c) Es sei A ein Alphabet und $w' \in A^+$ beliebig. Welcher Wert steht in der Wurzel jedes Huffman-Baumes $B_{w'}$ zu w'? Begründen Sie Ihre Antwort.

/ 7

Aufgabe 2 (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)

/ 2

a) Es sei $A = \{a, b\}$. Geben Sie zwei *unendliche* formale Sprachen $L_1 \subseteq A^*$ und $L_2 \subseteq A^*$ an, für die gilt:

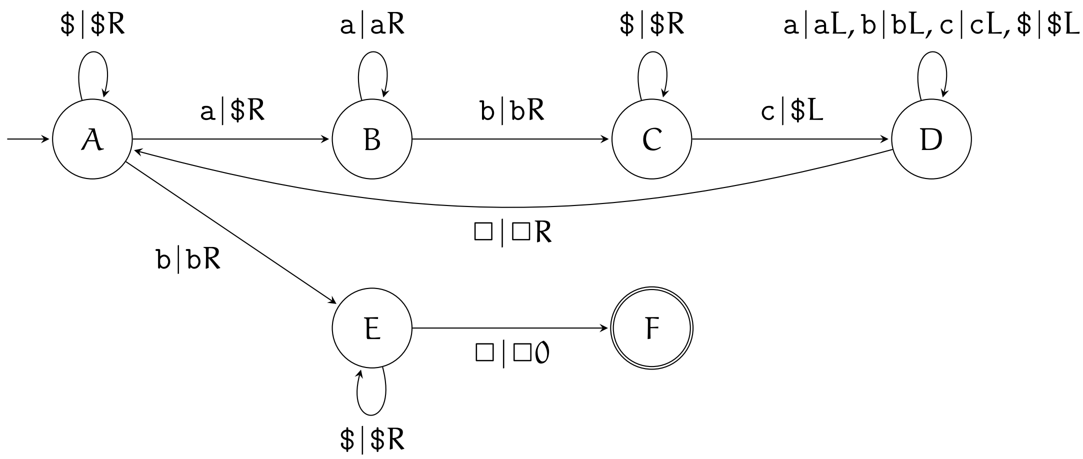
(i) $L_1 \neq L_2$ und (ii) $L_1L_2 = L_2L_1$ und (iii) $L_1L_2L_1 \neq L_2L_1L_2$.

$L_1 =$ $\{a\}^*$

$L_2 =$ $\{a\}^+$

/ 2

b) Geben Sie die Sprache an, die von folgender Turing-Maschine T mit Eingabealphabet $X = \{a, b, c\}$ und Bandalphabet $Y = X \cup \{\$, \square\}$ erkannt wird:



$L(T) =$ $\{a^n b c^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

/ 3

c) Beweisen Sie die folgenden Aussagen im O-Kalkül:

(i) $3^{n+5} \in \Theta(3^n)$ (ii) $\sum_{k=1}^{n} k^4 \in O(n^5)$ (iii) $\sum_{k=1}^{n} k^4 \in \Omega(n^5)$

Hinweis. Sie dürfen in Ihrem Beweis zu (iii) annehmen, dass $n/2$ eine ganze Zahl ist.

Lösung 2

c) (i) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $3^{n+5} \leq 3^5 \cdot 3^n$ sowie $3^n \leq 1 \cdot 3^{n+5}$.

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k^4 \leq \sum_{k=1}^{n} n^4 = n \cdot n^4 = n^5$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^4 \geq \sum_{k=n/2}^{n} k^4 \geq \sum_{k=n/2}^{n} (n/2)^4 = (n/2+1)(n/2)^4 \geq (1/2^5) \cdot n^5$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

/ 7

Aufgabe 3 (1 + 1 + 2 + 3 = 7 Punkte)

Es sei $\mathit{Var}_{\mathrm{AL}}$ ein Alphabet aussagenlogischer Variablen. Die Elemente von $L = \mathit{Var}_{\mathrm{AL}} \cup \{\neg v \mid v \in \mathit{Var}_{\mathrm{AL}}\}$ heißen *Literale*. Eine *2-KNF Klausel* ist ein Element aus $K = \{(\ell_1 \vee \ell_2) \mid \ell_1, \ell_2 \in L\}$. Eine *2-KNF Formel* ist ein Element aus $V(K)$, wobei $V(K) = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i(K)$ ist und $V_i(K)$ für $i \in \mathbb{N}_0$ wie folgt induktiv festgelegt ist:

$$V_0(K) = K, \qquad V_{i+1}(K) = \{f \wedge k \mid f \in V_i(K), k \in K\}$$

/ 1

a) Es seien $F, G \in \mathit{For}_{\mathrm{AL}}$ beliebige aussagenlogische Formeln über $\mathit{Var}_{\mathrm{AL}}$. Wann heißen F und G *logisch äquivalent*?

Wenn für jede Interpretation I gilt: $\mathit{val}_I(F) = \mathit{val}_I(G)$

/ 1

b) Es sei $\mathit{Var}_{\mathrm{AL}} = \{P, Q\}$ und $F = (P \to Q) \to P$. Geben Sie eine 2-KNF Formel $G \in V(K)$ an, die zu F logisch äquivalent ist:

$G =$

Es sei nun $\mathit{Var}_{\mathrm{AL}}$ wieder beliebig.

/ 2

c) Geben Sie explizit die Menge $K' \subseteq K$ aller 2-KNF *Klauseln* an, die Tautologien sind:

$K' =$

Achten Sie darauf, dass Ihr K' *alle* solche Klauseln enthält, auch wenn manche logisch äquivalent sind.

/ 3

d) Zeigen Sie, dass eine Formel $T \in V(K)$ genau dann eine Tautologie ist, wenn $T \in V(K')$ ist (d. h., jede 2-KNF Klausel von T ist ein Element aus K', wobei K' die Menge aus Teilaufgabe c) ist).

Hinweis: Sie müssen nicht mehr zeigen, dass Ihr K' die in Teilaufgabe c) verlangte Eigenschaft hat.

Lösung 3

d) Wenn $\mathsf{T} \in \mathsf{V}(\mathsf{K})$ eine Tautologie ist, dann gilt für jede Interpretation I gelten: $val_{\mathrm{I}}(\mathsf{T}) = \mathbf{w}$. Nach Definition von $\mathsf{V}(\mathsf{K})$ (das kann man z. B. induktiv zeigen) ist dann $val_{\mathrm{I}}(\mathsf{k}) = \mathbf{w}$ für jede Klausel k von T. Da k und I unabhängig voneinander sind, so kann man die Allquantoren „vertauschen", das heißt, für jede Klausel k von T muss für jede Interpretation I gelten: $val_{\mathrm{I}}(\mathsf{k}) = \mathbf{w}$. Es folgt, dass $\mathsf{k} \in \mathsf{K}'$ ist.

   Umgekehrt ist $\mathsf{T} \in \mathsf{V}(\mathsf{K})$ keine Tautologie, so gibt es eine Interpretation I mit $val_{\mathrm{I}}(\mathsf{T}) = \mathbf{f}$. Also ist $val_{\mathrm{I}}(\mathsf{k}) = \mathbf{f}$ für eine Klausel k von T und damit ist $\mathsf{k} \notin \mathsf{K}'$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 5

Aufgabe 4 (1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte)

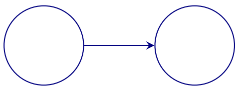
In dieser Aufgabe geht es um gerichtete Graphen $G = (V, E)$ (mit endlicher Knotenmenge V).

Zur Erinnerung: Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist E^k die Relation auf V, die alle Knotenpaare (x, y) enthält, für die gilt: Es gibt einen Pfad in G der Länge k von x nach y.

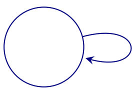
a) Geben Sie eine induktive Definition aller Relationen E^k mit $k \in \mathbb{N}_0$ an. / 1

$E^0 = I_V$, $E^{k+1} = E^k \circ E$

b) Geben Sie (als Bild oder formal) einen Graphen an, bei dem mindestens eine, aber nur endliche viele Relationen E^k nicht leer sind. / 1



c) Geben Sie (als Bild oder formal) einen Graphen an, bei dem nur endliche viele Relationen E^k leer sind. / 1



d) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Graphen, bei dem unendliche viele der Relationen E^k leer sind und unendlich viele nicht leer. / 2

Lösung 4

d)

e) Die Behauptung ist **falsch**.

Es sei E^k leer für ein $k > 0$. Dann ist $E^{k+1} = E^k \circ E = \varnothing \circ E = \varnothing$, also auch leer. Induktiv kann man also zeigen, dass $E^{k+n} = \varnothing$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Damit ist E^m für $m \in \mathbb{N}_0$ nur dann nicht leer, wenn $m < k$ ist, das heißt, es kann nur endlich viele solche E^m geben.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

/ 7

Aufgabe 5 (1 + 2 + 4 = 7 Punkte)

Es sei $T = \{a, b\}$. Ferner sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N = \{S, X, Y\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ \; & S \to XaabY, \\ & X \to abX \mid \varepsilon, \\ & Y \to aY \mid \varepsilon \; \}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, sodass $\langle R \rangle = L(G)$ ist: / 1

$R =$ `(ab)*aaba*`

b) Geben Sie eine *rechtslineare* Grammatik $G' = (N', T, S', P')$ mit höchstens 3 Nichtterminalsymbolen (d. h. $|N'| \leq 3$) an, für die $L(G') = L(G)^*$ ist. / 2

c) Es sei $L = \{w \in (N \cup T)^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_+ : S \Rightarrow^n w\}$ sowie $f\colon L \to \mathbb{R}_0^+$ die Abbildung mit / 4

$$f(w) = \frac{N_b(w)}{N_a(w)}$$

für jedes $w \in L$, wobei $N_x(w)$ die Anzahl Vorkommen des Symbols $x \in T$ in w bezeichne.

Zeigen Sie, dass $f(w) \leq 1$ für jedes $w \in L$ ist. Verwenden Sie vollständige Induktion über die Anzahl Ableitungsschritte, die G benötigt, um w zu erzeugen (also $n \in \mathbb{N}_+$ mit $S \Rightarrow^n w$). Der Induktionsanfang soll $n = 1$ sein.

Lösung 5

b) $N' = \{S', X', Y'\}$ und $P' = \{S' \to X' \mid \varepsilon, X' \to abX' \mid aabY', Y' \to aY' \mid \varepsilon \mid X'\}$

c) **IA.** Für $n = 1$ Produktion ist $S \Rightarrow XaabY$ die einzige Möglichkeit, also $w = XaabY$ und $f(w) = \frac{1}{2} \leq 1$.

IS. Es seien $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq 2$ sowie $w, w' \in L$ beliebig mit $w' \Rightarrow w$. Zudem sei $f(w'') \leq 1$ für jedes $w'' \in L$ mit $S \Rightarrow^n w''$ (IV).

Fallunterscheidung nach der Produktion, die angewendet wird, um w aus w' zu erzeugen:

$S \to XaabY$: Nicht möglich, da diese Produktion nur einmal am Anfang verwendet werden darf (und $n \geq 2$).

$X \to \varepsilon$ oder $Y \to \varepsilon$: In diesem Fall ist die Behauptung trivial, weil $N_x(w) = N_x(w')$ für jedes $x \in T$ ist.

$Y \to aY$: Es gilt dann:

$$f(w) = \frac{N_b(w)}{N_a(w)} = \frac{N_b(w')}{N_a(w') + 1} \leq \frac{N_b(w')}{N_a(w')} \overset{\text{IV}}{\leq} 1$$

$X \to abX$: Wegen IV gilt $N_b(w') \leq N_a(w')$. Damit:

$$f(w) = \frac{N_b(w)}{N_a(w)} = \frac{N_b(w') + 1}{N_a(w') + 1} \leq \frac{N_a(w') + 1}{N_a(w') + 1} = 1$$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

/ 7

Aufgabe 6 (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

Es sei $A = \{a, b\}$. Für $w \in A^*$ und $x \in A$ sei $N_x(w)$ die Zahl der Vorkommen von Symbol x in Wort w.

Es sei L die formale Sprache aller Wörter $w \in A^*$ mit der Eigenschaft, dass für jedes Präfix v von w gilt: $-1 \leq N_a(v) - N_b(v) \leq 1$.

/ 2

a) Geben Sie für jedes der folgenden Wörter w jeweils für alle Längen $0 \leq k \leq |w|$ eines Präfix v den Wert $N_a(v) - N_b(v)$ an. Tragen Sie die Werte in die folgende Tabelle ein. Einen Wert haben wir schon als Beispiel eingetragen.

	Länge des Präfix							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$w = \mathtt{abbaaba}$	0	1	0	−1	0	1	0	1
$w = \mathtt{baaabba}$	0	−1	0	1	2	1	0	1

/ 3

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit höchstens 5 Zuständen an, der genau L akzeptiert.

Für $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $c \leq d$ sei nun $L(c, d)$ die formale Sprache aller Wörter $w \in A^*$ mit der Eigenschaft $w \in L$ und $c \leq N_a(w) - N_b(w) \leq d$.

/ 2

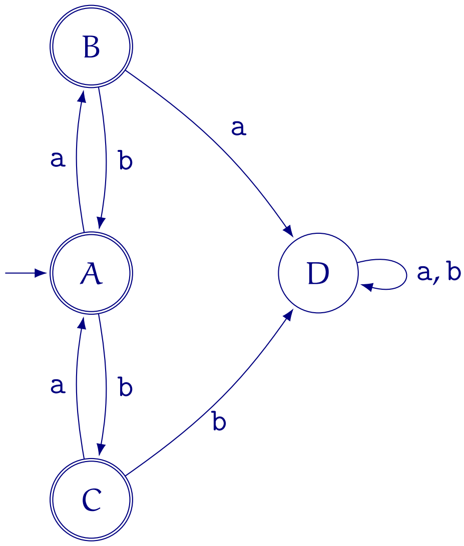
c) Angenommen, man darf an Ihrem Akzeptor aus Teilaufgabe b) *ausschließlich* die Menge akzeptierender Zustände F ändern. (D. h., die Zustandsmenge, der Startzustand und sämtliche Zustandsübergänge bleiben dieselben.) Gibt es für die folgenden Werte von c und d dann eine Menge $F(c, d)$ akzeptierender Zustände, sodass Ihr Automat *genau* die Sprache $L(c, d)$ akzeptiert?

Falls ja, geben Sie eine solche Menge $F(c, d)$ an; andernfalls begründen Sie, warum das nicht der Fall sein kann:

(i) $c = 0, d = 0$ (ii) $c = 0, d = 1$ (iii) $c = 0, d = 2$

Lösung 6

b)



c) (i) $F(0,0) = \{A\}$

(ii) $F(0,1) = \{A,B\}$

(iii) $F(0,2) = F(0,1)$ (denn $L(0,1) = L(0,2)$)

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

/ 6

Aufgabe 7 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Turing-Maschinen, deren Eingabealphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ ist und die *für jede Eingabe* anhalten.

Eine Sprache $L \subseteq X^*$ heißt *trivial*, wenn $L = \varnothing$ oder $L = X^*$ ist.

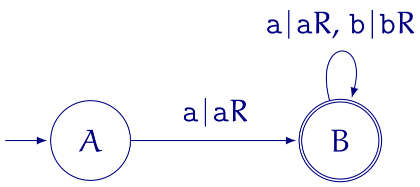
a) Geben Sie eine Turing-Maschine T_1 mit höchstens 3 Zuständen an, sodass $L(T_1)$ nicht trivial ist und für die Zeitkomplexität Time_{T_1} von T_1 gilt: $\mathrm{Time}_{T_1}(n) \in \Theta(n)$. / 2

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

b) Ist T_2 eine Turing-Maschine mit Zeitkomplexität $\mathrm{Time}_{T_2}(n) \in \Theta(1)$, so ist entweder $L(T_2)$ oder $X^* \setminus L(T_2)$ endlich. / 2

c) Ist T_3 eine Turing-Maschine und ist $L(T_3)$ trivial, dann gilt $\mathrm{Time}_{T_3}(n) \in O(1)$. / 2

Lösung 7

a) 

b) Die Aussage ist **falsch**. Gegenbeispiel:

Dann sind sowohl $L(T_2) = \{\mathtt{a}\} \cdot X^*$ als auch $X^* \setminus L(T_2) = \{\varepsilon\} \cup \{\mathtt{b}\} \cdot X^*$ unendlich.

c) Die Aussage ist **falsch**. Gegenbeispiel: T_3 gleich der TM, die entsteht, wenn der Zustand B von T_1 nicht mehr akzeptierend ist. Dann gilt immer noch $\mathrm{Time}_{T_3}(n) \in \Theta(n)$, obwohl $L(T_3) = \varnothing$ ist.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: