Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 1

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 4. November 2020

Abgabe: 17. November 2020, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 1:	/ 19	Blätter 1 – 1, Stud. 1:	/ 19
		Blätter 1 – 1, Stud. 2:	/ 19

Fachschaftsveranstaltungen für Erstis

Du interessierst dich für die Arbeit der Fachschaft und möchtest dich vielleicht gerne selbst engagieren? Schau einfach vorbei am **13. November um 17:30 Uhr unter https://o-phase.live/** zum **Vorstellungsstream der Fachschaft**. Hier zeigen wir dir, wie die Fachschaft organisiert ist, was ihre Aufgaben sind und wie du dich bei uns einbringen kannst.
Außerdem haben wir einen **Einstiegs-Fachschaftsrat** für den **18. November um 17:30 Uhr unter https://meet.vs.kit.edu/b/len-prm-rv4** geplant. Dort kannst du erfahren, wie die Fachschaft Entscheidungen trifft und selbst mitentscheiden.

Aufgabe 1.1 (2 + 2 = 4 Punkte)
Es seien A, B, und C beliebige Mengen. Zeigen Sie:

a) Es gilt $A \cap B = A$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ ist.
b) Wenn $B \subseteq C$ ist, dann ist $B \setminus (C \setminus A) = A \cap B$.

Aufgabe 1.2 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Es gibt eine Menge A, für die für jede Menge B gilt: $A \times B = \varnothing$.
b) Es gibt Mengen A und B, für die $|A \times B| < |B|$ ist.
c) Gilt $A \times B = B \times C$ für Mengen A, B, und C, so muss dann $A = B = C$ sein.

Aufgabe 1.3 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

a) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to 2^{\mathbb{N}_0}$ mit folgender Eigenschaft an: Wenn $x < y$ ist, dann gilt $f(y) \subsetneq f(x)$.
b) Geben Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{N}_0 \to 2^{\mathbb{N}_0}$, sodass $g(x)$ für jedes x unendlich ist und für g zusätzlich Folgendes erfüllt ist: Wenn $x < y$ ist, dann gilt $g(x) \subsetneq g(y)$.
c) Es sei $h\colon \mathbb{N}_0 \to 2^{\mathbb{N}_0}$ so, dass für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ gilt: $h(x+2) = h(x+1) \setminus h(x)$. Zeigen Sie, dass dann $h(x+3) = \varnothing$ für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 1.4 auf der folgenden Seite

Aufgabe 1.4 (1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte)

In der theoretischen Informatik werden Sie häufig mit *Problemen* konfrontiert werden. Ein *Suchproblem* ist eine Relation $S \subseteq I \times L$, wobei I eine Menge von (*Problem-*)*Instanzen* und L eine Menge von *Lösungen* ist. Für eine Instanz $x \in I$ schreiben wir (wie viele andere Autoren auch) $S(x)$ für die Menge $S(x) = \{y \in L \mid (x, y) \in S\}$ und nennen das die Menge von *Lösungen zu* x.

a) Es sei $I = L = \mathbb{N}_+$ und für $x \in I$ sei $y \in S(x)$ genau dann, wenn x durch y *teilbar* ist, das heißt, wenn es $z \in \mathbb{N}_+$ mit $x = yz$ gibt. Geben Sie $S(x)$ für jedes $x \in \{5, 8, 12\}$ explizit an.

b) Ein Suchproblem ist im Allgemeinen ja nur eine Relation. Geben Sie eine (notwendige und hinreichende) Bedingung dafür an, dass ein (beliebiges) Suchproblem S eine Funktion ist. Verwenden Sie dabei keines der Wörter „linkstotal“ und „rechtseindeutig“.

Man sagt, ein Suchproblem $E \subseteq I \times L$ ist ein *Entscheidungsproblem*, wenn E eine Funktion und $L = \{0, 1\}$ ist, wobei 1 als „ja“ und 0 als „nein“ interpretiert wird. In diesem Fall steht $E(x)$ wie üblich für den Funktionswert an der Stelle $x \in I$.

c) Es sei S wie in a). Zudem sei $E \colon \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \to \{0, 1\}$ das Entscheidungsproblem mit $E(x, y) = 1$ genau dann, wenn x und y einen nicht-trivialen gemeinsamen Teiler haben, das heißt, wenn es $z \in S(x) \cap S(y)$ mit $z \neq 1$ gibt. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{N}_+$ gilt: $E(x, x + 1) = 0$.

Zu jedem Suchproblem S gehört ein *kanonisches Entscheidungsproblem* K_S, das durch folgende Bedingung gegeben ist: Es gilt $K_S(x) = 1$ genau dann, wenn eine Lösung zu x existiert, das heißt, wenn $S(x) \neq \varnothing$ gilt.

d) Es seien I, L, und S wieder wie in a). Was ist dann $K_S(x)$, wobei $x \in I$ beliebig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Geben Sie ein Suchproblem S samt Mengen I und L an, für das K_S *nicht trivial* ist, das heißt, es existiert sowohl ein $x \in I$ mit $K_S(x) = 1$ als auch ein $x' \in I$ mit $K_S(x') = 0$. Begründen Sie anschließend, warum das für Ihr S der Fall ist.