Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 1
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 4. November 2020

Abgabe: 17. November 2020, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 1:	/ 19	Blätter 1 – 1, Stud. 1:	/ 19
		Blätter 1 – 1, Stud. 2:	/ 19

Fachschaftsveranstaltungen für Erstis

Du interessierst dich für die Arbeit der Fachschaft und möchtest dich vielleicht gerne selbst engagieren? Schau einfach vorbei am **13. November um 17:30 Uhr unter https://o-phase.live/** zum **Vorstellungsstream der Fachschaft**. Hier zeigen wir dir, wie die Fachschaft organisiert ist, was ihre Aufgaben sind und wie du dich bei uns einbringen kannst.
Außerdem haben wir einen **Einstiegs-Fachschaftsrat** für den **18. November um 17:30 Uhr unter https://meet.vs.kit.edu/b/len-prm-rv4** geplant. Dort kannst du erfahren, wie die Fachschaft Entscheidungen trifft und selbst mitentscheiden.

Aufgabe 1.1 (2 + 2 = 4 Punkte)
Es seien A, B, und C beliebige Mengen. Zeigen Sie:

a) Es gilt $A \cap B = A$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ ist.
b) Wenn $B \subseteq C$ ist, dann ist $B \setminus (C \setminus A) = A \cap B$.

Lösung 1.1

a) Es gelte $A \cap B = A$ und es sei $x \in A$. Dann ist $x \in A \cap B$, also ($x \in A$ und) $x \in B$. Da x beliebig war, so ist also $A \subseteq B$.
Sei andererseits $A \subseteq B$. Damit ist $x \in A$ genau dann, wenn sowohl $x \in A$ und $x \in B$ ist. Das heißt:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x \mid x \in A\} = A.$$

b) Es sei $B \subseteq C$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
x \in B \setminus (C \setminus A) \quad & \text{gdw.} \quad x \in B \text{ und nicht } (x \in C \text{ und } x \notin A) \\
& \text{gdw.} \quad x \in B \text{ und } (x \notin C \text{ oder } x \in A) \\
& \text{gdw.} \quad (x \in B \text{ und } x \notin C) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in B) \\
& \text{gdw.} \quad x \in A \text{ und } x \in B \\
& \text{gdw.} \quad x \in A \cap B
\end{aligned}$$

wobei wir beim vorletzten „gdw." benutzen, dass $x \in B$ und $x \notin C$ unmöglich ist (wegen $B \subseteq C$).

Aufgabe 1.2 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Es gibt eine Menge A, für die für jede Menge B gilt: $A \times B = \emptyset$.
b) Es gibt Mengen A und B, für die $|A \times B| < |B|$ ist.
c) Gilt $A \times B = B \times C$ für Mengen A, B, und C, so muss dann $A = B = C$ sein.

Lösung 1.2

a) Die Behauptung ist **richtig**. Denn für $A = \varnothing$ gilt

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\} = \{(x,y) \mid x \in \varnothing \text{ und } y \in B\} = \varnothing,$$

weil die Bedingung „$x \in \varnothing$“ nie erfüllt ist.

b) Die Behauptung ist **richtig** für $A = \varnothing$ und $B \neq \varnothing$: Wie eben gezeigt ist $|A \times B| = |\varnothing| = 0$, also gilt $|A \times B| < |B|$ für jede Menge $B \neq \varnothing$.

c) Die Behauptung ist **falsch**. Denn für $B = \varnothing$ gilt $A \times B = \varnothing = B \times C$ unabhängig davon, ob $A = C$ oder $A \neq C$ ist.

Aufgabe 1.3 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

a) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to 2^{\mathbb{N}_0}$ mit folgender Eigenschaft an: Wenn $x < y$ ist, dann gilt $f(y) \subsetneq f(x)$.

b) Geben Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{N}_0 \to 2^{\mathbb{N}_0}$, sodass $g(x)$ für jedes x unendlich ist und für g zusätzlich Folgendes erfüllt ist: Wenn $x < y$ ist, dann gilt $g(x) \subsetneq g(y)$.

c) Es sei $h\colon \mathbb{N}_0 \to 2^{\mathbb{N}_0}$ so, dass für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ gilt: $h(x+2) = h(x+1) \setminus h(x)$. Zeigen Sie, dass dann $h(x+3) = \varnothing$ für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Lösung 1.3

a) z. B. $f(x) = \{z \in \mathbb{N}_0 \mid z \geq x\}$

b) z. B. $g(x) = U \cup \{2z \mid z \in \mathbb{N}_0 \text{ und } z < x\}$, wobei $U \subseteq \mathbb{N}_0$ die Menge der ungeraden Zahlen ist.

c) Es sei $x \geq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} h(x+3) &= h(x+2) \setminus h(x+1) \\ &= (h(x+1) \setminus h(x)) \setminus h(x+1) \\ &= \varnothing, \end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Gleichung die Tatsache verwenden, dass $(A \setminus B) \setminus A = \varnothing$ für beliebige Mengen A und B ist.

Aufgabe 1.4 (1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte)

In der theoretischen Informatik werden Sie häufig mit *Problemen* konfrontiert werden. Ein *Suchproblem* ist eine Relation $S \subseteq I \times L$, wobei I eine Menge von (*Problem-*)*Instanzen* und L eine Menge von *Lösungen* ist. Für eine Instanz $x \in I$ schreiben wir (wie viele andere Autoren auch) $S(x)$ für die Menge $S(x) = \{y \in L \mid (x,y) \in S\}$ und nennen das die Menge von *Lösungen zu x*.

a) Es sei $I = L = \mathbb{N}_+$ und für $x \in I$ sei $y \in S(x)$ genau dann, wenn x durch y *teilbar* ist, das heißt, wenn es $z \in \mathbb{N}_+$ mit $x = yz$ gibt. Geben Sie $S(x)$ für jedes $x \in \{5, 8, 12\}$ explizit an.

b) Ein Suchproblem ist im Allgemeinen ja nur eine Relation. Geben Sie eine (notwendige und hinreichende) Bedingung dafür an, dass ein (beliebiges) Suchproblem S eine Funktion ist. Verwenden Sie dabei keines der Wörter „linkstotal“ und „rechtseindeutig“.

Man sagt, ein Suchproblem $E \subseteq I \times L$ ist ein *Entscheidungsproblem*, wenn E eine Funktion und $L = \{0, 1\}$ ist, wobei 1 als „ja“ und 0 als „nein“ interpretiert wird. In diesem Fall steht $E(x)$ wie üblich für den Funktionswert an der Stelle $x \in I$.

c) Es sei S wie in a). Zudem sei $E\colon \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \to \{0, 1\}$ das Entscheidungsproblem mit $E(x,y) = 1$ genau dann, wenn x und y einen nicht-trivialen gemeinsamen Teiler haben, das heißt, wenn es $z \in S(x) \cap S(y)$ mit $z \neq 1$ gibt. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{N}_+$ gilt: $E(x, x+1) = 0$.

Zu jedem Suchproblem S gehört ein *kanonisches Entscheidungsproblem* K_S, das durch folgende Bedingung gegeben ist: Es gilt $K_S(x) = 1$ genau dann, wenn eine Lösung zu x existiert, das heißt, wenn $S(x) \neq \varnothing$ gilt.

d) Es seien I, L, und S wieder wie in a). Was ist dann $K_S(x)$, wobei $x \in I$ beliebig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Geben Sie ein Suchproblem S samt Mengen I und L an, für das K_S *nicht trivial* ist, das heißt, es existiert sowohl ein $x \in I$ mit $K_S(x) = 1$ als auch ein $x' \in I$ mit $K_S(x') = 0$. Begründen Sie anschließend, warum das für Ihr S der Fall ist.

Lösung 1.4

a)
- $S(5) = \{1, 5\}$
- $S(8) = \{1, 2, 4, 8\}$
- $S(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Wenn 1 konsistent vergessen: -0.5P

b) Jede Instanz $x \in I$ hat eine eindeutige Lösung, das heißt, $|S(x)| = 1$.

c) Es sei $z \in S(x) \cap S(x+1)$. Dann gibt es $y_1, y_2 \in \mathbb{N}_+$ mit $zy_1 = x$ und $zy_2 = x + 1$. Es folgt also $zy_2 = zy_1 + 1$ und damit $z(y_2 - y_1) = 1$. Da $z \in \mathbb{N}_+$ ist, so muss also $z = 1$ gelten, das heißt, $S(x) \cap S(x+1) = \{1\}$ und damit $E(x, x+1) = 0$.

d) $K_S(x) = 1$ für jedes $x \in \mathbb{N}_+$, weil stets $1 \in S(x)$ gilt (da jede Zahl durch 1 teilbar ist).

e) Z. B. $I = \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$, $L = \mathbb{N}_+$, und S durch folgende Bedingung definiert: Es gilt $z \in S(x, y)$ genau dann, wenn z ein nicht-trivialer Teiler von x und y ist (im Sinne von Teilaufgabe c)).

K_S ist dann nicht trivial, weil wie in c) gezeigt gilt $K_S(x, x+1) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{N}_+$ aber z. B. $K_S(8, 12) = 1$, weil beide Zahlen durch 4 teilbar sind.