Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 2

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 11. November 2020

Abgabe: 24. November 2020, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 2:	/ 19	Blätter 1 – 2, Stud. 1:	/ 38
		Blätter 1 – 2, Stud. 2:	/ 38

Aufgabe 2.1 (2 + 1 = 3 Punkte)
Es sei M eine Menge. In dieser Aufgabe geht es um binäre Operationen $\diamond\colon M \times M \to M$ auf M.

a) Zeigen Sie: Wenn $|M| = 1$ ist, dann ist $\diamond$ sowohl kommutativ als auch assoziativ.
b) Es sei $|M| = 2$. Wie viele solche binäre Operationen sind kommutativ? Erklären Sie kurz, wie Sie zu Ihrem Ergebnis gekommen sind.
Tipp. Damit Sie nicht alle Möglichkeiten durchprobieren müssen: Stellen Sie $\diamond$ tabellenartig dar und überlegen Sie sich, welche Zusammenhänge zwischen den Einträgen in der Tabelle bestehen müssen.

Aufgabe 2.2 (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)
Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei eine binäre Operation $\diamond\colon (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^2 \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wie folgt für alle Paare $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert:

$$(x_1, y_1) \diamond (x_2, y_2) = (x_1 y_2, x_2 y_1).$$

a) Zeigen Sie, dass $\diamond$ nicht kommutativ ist.
b) Zeigen Sie, dass $\diamond$ nicht assoziativ ist.
c) Geben Sie eine *unendliche* Menge $K \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, für die Folgendes gilt: Wenn $k_1, k_2 \in K$ sind, dann gilt $k_1 \diamond k_2 = k_2 \diamond k_1$.
d) Beweisen Sie, dass Ihr K die in Teilaufgabe c) verlangte Eigenschaft hat.

Aufgabe 2.3 (1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine Relation $\preceq$ auf $A^n \times A^n$ für jede $x, y \in A^n$ wie folgt:

$$\forall i \in \mathbb{Z}_n : \quad \text{wenn } x(i) \neq y(i), \text{ dann } x(i) = \mathtt{0} \text{ und } y(i) = \mathtt{1}$$

a) Geben Sie für $n = 4$ und $y = \mathtt{0110}$ alle $x \in A^n$ explizit an, für die $x \preceq y$ gilt.
b) Es sei n beliebig und $m \in \mathbb{N}_0$ sei die Anzahl Einsen in y. Wie viele $x \in A^n$ gibt es, sodass $x \preceq y$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Relation $\preceq$ ist eine sogenannte *Halbordnung*. In diesem Zusammenhang sagt man, $x \in A^n$ ist ein *kleinstes Element*, wenn für jedes $y \in A^n$ gilt: $x \preceq y$. Analog ist $z \in A^n$ ein *größtes Element*, wenn für jedes $y \in A^n$ gilt: $y \preceq z$.

c) Geben Sie alle kleinsten und größten Elemente von A^n bezüglich $\preceq$ an.
d) Es sei $n \geq 2$. Zeigen Sie: Ist $x \in A^n$ weder ein kleinstes noch ein größtes Element, so gibt es $y \in A^n$ mit der Eigenschaft: Es gilt weder $x \preceq y$ noch $y \preceq x$. (Man sagt dann, x und y sind *unvergleichbar*.)

Aufgabe 2.4 (1 + 2 + 1 + 3 = 7 Punkte)
In dieser Aufgabe werden wir sehen, wie Wörter über dem binären Alphabet $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ alternativ definiert werden können.

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine Abbildung $\ddot{U}\colon 2^{\mathbb{Z}_n} \to A^n$, sodass für $M \in 2^{\mathbb{Z}_n}$ das Wort $w = \ddot{U}(M) \in A^n$ eindeutig durch folgende Eigenschaft gegeben ist: Für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ ist $w(i) = \mathtt{1}$ genau dann, wenn $i \in M$ ist.

(Dabei steht „$\ddot{U}$“ für „Übersetzung“. Wir werden später in Kapitel 8 der Vorlesung mehr über Übersetzungen reden.)

a) Es sei $n = 4$. Geben Sie $\ddot{U}(M)$ für jedes $M \in \{\{1, 2, 3\}, \{0, 3\}, \varnothing\}$ explizit an.

b) Es sei n wieder beliebig. Zeigen Sie, dass $\ddot{U}$ bijektiv ist.
Tipp. Nachdem Sie gezeigt haben, dass $\ddot{U}$ injektiv ist, können Sie für die Surjektivität von $\ddot{U}$ einfach anhand der Kardinalitäten der Definitions- und Bildbereich von $\ddot{U}$ argumentieren.

c) Es sei $w \in A^n$. Geben Sie eine (hinreichende und notwendige) Bedingung für $M \in 2^{\mathbb{Z}_n}$ an, sodass $\ddot{U}(M) = w$ ist. In Ihrer Formulierung darf $\ddot{U}$ dabei nirgends vorkommen.

d) Es sei $\preceq \subseteq A^n \times A^n$ die Relation aus Aufgabe 2.3. Zeigen Sie, dass für jede $M_1, M_2 \in 2^{\mathbb{Z}_n}$ Folgendes gilt: Es ist $M_1 \subseteq M_2$ genau dann, wenn $\ddot{U}(M_1) \preceq \ddot{U}(M_2)$.