Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 2
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 11. November 2020

Abgabe: 24. November 2020, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 2:	/ 19	Blätter 1 – 2, Stud. 1:	/ 38
		Blätter 1 – 2, Stud. 2:	/ 38

Aufgabe 2.1 (2 + 1 = 3 Punkte)
Es sei M eine Menge. In dieser Aufgabe geht es um binäre Operationen $\diamond\colon M \times M \to M$ auf M.

a) Zeigen Sie: Wenn $|M| = 1$ ist, dann ist $\diamond$ sowohl kommutativ als auch assoziativ.
b) Es sei $|M| = 2$. Wie viele solche binäre Operationen sind kommutativ? Erklären Sie kurz, wie Sie zu Ihrem Ergebnis gekommen sind.
Tipp. Damit Sie nicht alle Möglichkeiten durchprobieren müssen: Stellen Sie $\diamond$ tabellenartig dar und überlegen Sie sich, welche Zusammenhänge zwischen den Einträgen in der Tabelle bestehen müssen.

Lösung 2.1

a) Es sei $m \in M$ das einzige Element in M. Da $\diamond$ eine Abbildung ist, so gilt also $a \diamond b = m$ für jede $a, b \in M$. Für $a, b \in M$ beliebig ist damit

$$a \diamond b = m = b \diamond a$$

und analog gilt für jede $a, b, c \in M$:

$$(a \diamond b) \diamond c = m \diamond c = m = a \diamond m = a \diamond (b \diamond c).$$

b) Es sei $M = \{m_1, m_2\}$. Jede binäre Operation $\diamond$ auf M kann wie folgt dargestellt werden:

	m_1	m_2
m_1	a	b
m_2	c	d

wobei $a = m_1 \diamond m_1$, $b = m_1 \diamond m_2$, usw. Jedes $\diamond$ ist damit eindeutig durch die Werte a, b, c, und d bestimmt.
$\diamond$ ist genau dann kommutativ, wenn $b = c$ ist. Das heißt, jedes kommutative $\diamond$ ist genau durch die Werte a, b, und d festgelegt. Da es $|M|^3 = 2^3 = 8$ verschiedene Möglichkeiten gibt, Werte für a, b, und d zu wählen, so muss es also insgesamt 8 verschiedene kommutative binäre Operationen auf M geben.

Aufgabe 2.2 (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)
Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei eine binäre Operation $\diamond\colon (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^2 \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wie folgt für alle Paare $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert:

$$(x_1, y_1) \diamond (x_2, y_2) = (x_1 y_2, x_2 y_1).$$

a) Zeigen Sie, dass $\diamond$ nicht kommutativ ist.
b) Zeigen Sie, dass $\diamond$ nicht assoziativ ist.
c) Geben Sie eine *unendliche* Menge $K \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an, für die Folgendes gilt: Wenn $k_1, k_2 \in K$ sind, dann gilt $k_1 \diamond k_2 = k_2 \diamond k_1$.
d) Beweisen Sie, dass Ihr K die in Teilaufgabe c) verlangte Eigenschaft hat.

Lösung 2.2

a) $(1,0) \diamond (1,1) = (1,0) \neq (0,1) = (1,1) \diamond (1,0)$
b) $((1,1) \diamond (1,1)) \diamond (1,0) = (1,1) \diamond (1,0) = (0,1) \neq (1,0) = (1,1) \diamond (0,1) = (1,1) \diamond ((1,1) \diamond (1,0))$

c) Z. B. $K = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$
d) Für jede $(x,x),(y,y) \in K$ gilt: $(x,x) \diamond (y,y) = (xy,xy) = (y,y) \diamond (x,x)$.

Aufgabe 2.3 (1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine Relation $\preceq$ auf $A^n \times A^n$ für jede $x,y \in A^n$ wie folgt:

$$\forall i \in \mathbb{Z}_n : \quad \text{wenn } x(i) \neq y(i), \text{ dann } x(i) = \mathtt{0} \text{ und } y(i) = \mathtt{1}$$

a) Geben Sie für $n = 4$ und $y = \mathtt{0110}$ alle $x \in A^n$ explizit an, für die $x \preceq y$ gilt.
b) Es sei n beliebig und $m \in \mathbb{N}_0$ sei die Anzahl Einsen in y. Wie viele $x \in A^n$ gibt es, sodass $x \preceq y$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Relation $\preceq$ ist eine sogenannte *Halbordnung*. In diesem Zusammenhang sagt man, $x \in A^n$ ist ein *kleinstes Element*, wenn für jedes $y \in A^n$ gilt: $x \preceq y$. Analog ist $z \in A^n$ ein *größtes Element*, wenn für jedes $y \in A^n$ gilt: $y \preceq z$.

c) Geben Sie alle kleinsten und größten Elemente von A^n bezüglich $\preceq$ an.
d) Es sei $n \geq 2$. Zeigen Sie: Ist $x \in A^n$ weder ein kleinstes noch ein größtes Element, so gibt es $y \in A^n$ mit der Eigenschaft: Es gilt weder $x \preceq y$ noch $y \preceq x$. (Man sagt dann, x und y sind *unvergleichbar*.)

Lösung 2.3
a) $\mathtt{0000}, \mathtt{0010}, \mathtt{0100}, \mathtt{0110}$.
b) Es gibt 2^m solche Elemente x.
Zuerst sieht man, dass jede $\mathtt{0}$ in y auch eine $\mathtt{0}$ in x sein muss, das heißt, wenn $y(i) = \mathtt{0}$ ist, dann auch $x(i) = \mathtt{0}$. Damit kann man den Wert $x(i)$ nur dann frei wählen, wenn $y(i) = \mathtt{1}$ ist, und für jedes solche i gibt es dann zwei Möglichkeiten (also entweder $x(i) = \mathtt{0}$ oder $x(i) = \mathtt{1}$). Insgesamt gibt es m viele solche i und daher 2^m solche x.
c) $\preceq$ hat ein eindeutiges kleinstes bzw. größtes Element, nämlich 0^n bzw. 1^n.
d) Da $n \geq 2$, so ist $A^n \neq \{\mathtt{0}^n, \mathtt{1}^n\}$. Wenn also $x \notin \{\mathtt{0}^n, \mathtt{1}^n\}$ ist, dann gibt es $i, j \in \mathbb{Z}_n$, sodass $x(i) = \mathtt{0}$ und $x(j) = \mathtt{1}$. Wähle $y \in A^n$ dann wie folgt:

$$y(k) = \begin{cases} \mathtt{1}, & k = i \\ \mathtt{0}, & k = j \\ x(k), & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt dann nicht $x \preceq y$, weil $x(j) = \mathtt{1}$ aber $y(j) = \mathtt{0}$ ist. Analog gilt auch nicht $y \preceq x$, weil $x(i) = \mathtt{0}$ aber $y(i) = \mathtt{1}$.
Eine andere Möglichkeit besteht in der Wahl:

$$\forall i \in \mathbb{Z}_n : \qquad y(i) = \begin{cases} \mathtt{1}, & \text{falls } x(i) = \mathtt{0} \\ \mathtt{0}, & \text{falls } x(i) = \mathtt{1} \end{cases}$$

Aufgabe 2.4 (1 + 2 + 1 + 3 = 7 Punkte)
In dieser Aufgabe werden wir sehen, wie Wörter über dem binären Alphabet $A = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$ alternativ definiert werden können.

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine Abbildung $\ddot{U}\colon 2^{\mathbb{Z}_n} \to A^n$, sodass für $M \in 2^{\mathbb{Z}_n}$ das Wort $w = \ddot{U}(M) \in A^n$ eindeutig durch folgende Eigenschaft gegeben ist: Für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ ist $w(i) = \mathtt{1}$ genau dann, wenn $i \in M$ ist.

(Dabei steht „$\ddot{U}$“ für „Übersetzung“. Wir werden später in Kapitel 8 der Vorlesung mehr über Übersetzungen reden.)

a) Es sei $n = 4$. Geben Sie $\ddot{U}(M)$ für jedes $M \in \{\{1,2,3\},\{0,3\},\varnothing\}$ explizit an.

b) Es sei n wieder beliebig. Zeigen Sie, dass $\ddot{U}$ bijektiv ist.
Tipp. Nachdem Sie gezeigt haben, dass $\ddot{U}$ injektiv ist, können Sie für die Surjektivität von $\ddot{U}$ einfach anhand der Kardinalitäten der Definitions- und Bildbereich von $\ddot{U}$ argumentieren.

c) Es sei $w \in A^n$. Geben Sie eine (hinreichende und notwendige) Bedingung für $M \in 2^{\mathbb{Z}_n}$ an, sodass $\ddot{U}(M) = w$ ist. In Ihrer Formulierung darf $\ddot{U}$ dabei nirgends vorkommen.

d) Es sei $\preceq \subseteq A^n \times A^n$ die Relation aus Aufgabe 2.3. Zeigen Sie, dass für jede $M_1, M_2 \in 2^{\mathbb{Z}_n}$ Folgendes gilt: Es ist $M_1 \subseteq M_2$ genau dann, wenn $\ddot{U}(M_1) \preceq \ddot{U}(M_2)$.

Lösung 2.4

a) $\ddot{U}(\{1,2,3\}) = \texttt{0111}$, $\ddot{U}(\{0,3\}) = \texttt{1001}$, $\ddot{U}(\varnothing) = \texttt{0000}$

b) Zuerst zeigen wir, dass $\ddot{U}$ injektiv ist. Seien hierzu $M_1, M_2 \in 2^{\mathbb{Z}_n}$ mit $w = \ddot{U}(M_1) = \ddot{U}(M_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} i \in M_1 \quad &\text{gdw.} \quad w(i) = \texttt{1} \\ &\text{gdw.} \quad i \in M_2. \end{aligned}$$

Also ist $M_1 = M_2$. Damit ist $\ddot{U}$ injektiv.
Für die Surjektivität beobachten wir: $|2^{\mathbb{Z}_n}| = 2^{|\mathbb{Z}_n|} = 2^n = |A|^n = |A^n|$. Wie in der Übung gezeigt muss also $\ddot{U}$ auch surjektiv sein.

c) $M = \{i \in \mathbb{Z}_n \mid w(i) = \texttt{1}\}$

d) Es sei $M_1 \subseteq M_2$, $w_1 = \ddot{U}(M_1)$, und $w_2 = \ddot{U}(M_2)$. Wegen der Mengeninklusion ist $w_2(i) = \texttt{1}$ für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$, für das $w_1(i) = \texttt{1}$ gilt. Damit muss für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ mit $w_1(i) \neq w_2(i)$ gelten: $i \notin M_1$ und $i \in M_2$, sprich $w_1(i) = \texttt{0}$ und $w_2(i) = \texttt{1}$.
Umgekehrt seien M_1 und M_2 beliebig, $w_1, w_2 \in A^n$ wie oben, und $w_1 \preceq w_2$. Für $i \in M_1$ gilt also $w_1(i) = \texttt{1}$. Damit ist $w_2(i) = \texttt{1}$ und es folgt $i \in M_2$. Da i beliebig war, so gilt also $M_1 \subseteq M_2$.