Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 4

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 25. November 2020

Abgabe: 8. Dezember 2020, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 4:	/ 20	Blätter 1 – 4, Stud. 1:	/ 80
		Blätter 1 – 4, Stud. 2:	/ 80

In allen Aufgaben auf diesem Blatt steht A für das Alphabet $\{\texttt{a}, \texttt{b}\}$.

Aufgabe 4.1 (1 + 1.5 + 2.5 = 5 Punkte)

Es sei eine binäre Operation $\sqcup\!\sqcup\colon A^* \times A^* \to A^*$ wie folgt induktiv definiert:

$$\forall w \in A^* : \qquad \varepsilon \sqcup\!\sqcup\, w = w \sqcup\!\sqcup\, \varepsilon = w$$
$$\forall w_1, w_2 \in A^*\ \forall x_1, x_2 \in A : \qquad (w_1x_1) \sqcup\!\sqcup\, (w_2x_2) = (w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2)x_1x_2$$

a) Berechnen Sie $\texttt{aba} \sqcup\!\sqcup\, \texttt{bba}$ schrittweise. Wenden Sie an jedem Schritt die Definition von $\sqcup\!\sqcup$ höchstens einmal an.

b) Ist $\sqcup\!\sqcup$ kommutativ? Ist $\sqcup\!\sqcup$ assoziativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:
Für jedes $w \in A^n$ ist $|w \sqcup\!\sqcup\, w| = 2|w|$.

Aufgabe 4.2 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

Für jede der folgenden Bedingungen B_i (wobei $i \in \{1, 2, 3\}$) sei L_i die Sprache $L_i = \{w \in A^* \mid \text{für } w \text{ gilt } B_i\}$. Geben Sie für jedes L_i einen formalen Mengenausdruck an, der genau L_i beschreibt. Verwenden Sie hierfür *ausschließlich* folgende Zeichen:

$$\texttt{a} \quad \texttt{b} \quad \texttt{\{} \quad \texttt{\}} \quad \texttt{(} \quad \texttt{)} \quad \texttt{,} \quad \texttt{*} \quad \cdot \quad \cup$$

Insbesondere dürfen Sie das Zeichen „ε“ nicht verwenden. Andererseits können Sie die leere Menge als „$\{\}$“ notieren.

a) B_1: „$|w| \geq 2$ und $w(0) = w(1)$“

b) B_2: „$|w| \neq 1$“

c) B_3: „$w \in L_1$ oder $w \notin L_2$“

Aufgabe 4.3 (1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

Eine Sprache $L \subseteq A^*$ sei wie folgt induktiv definiert:

- $\varepsilon \in L$
- wenn $x \in L$ ist, dann ist $\texttt{aa}x \in L$
- wenn $y, z \in L$ sind, dann ist $y\texttt{b}z \in L$

L enthalte sonst keine Wörter aus A^*.

a) Geben Sie alle Wörter $w \in L$ an, für die $|w| \leq 3$ ist.

b) Eine der folgenden zwei Behauptungen ist falsch. Widerlegen Sie sie.
  - Wenn es $x \in A^*$ gibt, sodass $\texttt{aa}x \in L$ ist, dann muss $x\texttt{aa} \in L$ sein.
  - Wenn es $y, z \in A^*$ mit $y\texttt{b}z \notin L$ gibt, so muss sowohl $y \notin L$ als auch $z \notin L$ sein.

c) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass ein Wort $w \in A^*$ in L ist, wenn in w das Zeichen $\texttt{b}$

(i) nirgends (ii) genau einmal (iii) genau zweimal

vorkommt. In Ihrer Antwort dürfen Sie dabei keinen Bezug auf L nehmen. (Sie dürfen sich aber auf Ihre andere Antworten beziehen.)

Aufgabe 4.4 (1 + 1 + 4 = 6 Punkte)

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn für eine Sprache $L \subseteq A^*$ die Gleichung $L = L^2$ gilt, dann muss L unendlich sein.

b) Geben Sie Sprachen $L_1, L_2 \subseteq A^*$ an, sodass $L_1 \neq L_2$ aber $L_1L_2^2 = L_1^2L_2$ ist.

c) Es seien $L_1, L_2 \subseteq A^*$ beliebige Sprachen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über i:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : \quad (L_1 \cup L_2)^i \subseteq (L_1^* L_2^*)^*.$$

Tipp. Es gilt $(L_1^*L_2^*)^* = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} (L_1^*L_2^*)^j$.