Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 4
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: 25. November 2020

Abgabe: 8. Dezember 2020, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 4: / 20   Blätter 1 – 4, Stud. 1: / 80

Blätter 1 – 4, Stud. 2: / 80

In allen Aufgaben auf diesem Blatt steht A für das Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Aufgabe 4.1 (1 + 1.5 + 2.5 = 5 Punkte)
Es sei eine binäre Operation $\sqcup\!\sqcup \colon A^* \times A^* \to A^*$ wie folgt induktiv definiert:

$$\begin{aligned} \forall w \in A^* : \quad & \varepsilon \sqcup\!\sqcup w = w \sqcup\!\sqcup \varepsilon = w \\ \forall w_1, w_2 \in A^* \; \forall x_1, x_2 \in A : \quad & (w_1 x_1) \sqcup\!\sqcup (w_2 x_2) = (w_1 \sqcup\!\sqcup w_2) x_1 x_2 \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $\mathtt{aba} \sqcup\!\sqcup \mathtt{bba}$ schrittweise. Wenden Sie an jedem Schritt die Definition von $\sqcup\!\sqcup$ höchstens einmal an.
b) Ist $\sqcup\!\sqcup$ kommutativ? Ist $\sqcup\!\sqcup$ assoziativ? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:
Für jedes $w \in A^n$ ist $|w \sqcup\!\sqcup w| = 2|w|$.

Lösung 4.1

a) $$\begin{aligned} \mathtt{aba} \sqcup\!\sqcup \mathtt{bba} &= (\mathtt{ab} \sqcup\!\sqcup \mathtt{bb})\mathtt{aa} \\ &= (\mathtt{a} \sqcup\!\sqcup \mathtt{b})\mathtt{bbaa} \\ &= (\varepsilon \sqcup\!\sqcup \varepsilon)\mathtt{abbbaa} \\ &= \varepsilon \cdot \mathtt{abbbaa} \\ &= \mathtt{abbbaa} \end{aligned}$$

b) $\sqcup\!\sqcup$ ist nicht kommutativ, da z. B. $\mathtt{a} \sqcup\!\sqcup \mathtt{b} = \mathtt{ab} \neq \mathtt{ba} = \mathtt{b} \sqcup\!\sqcup \mathtt{a}$. Es ist auch nicht assoziativ, denn

$$(\mathtt{a} \sqcup\!\sqcup \mathtt{b}) \sqcup\!\sqcup \mathtt{a} = \mathtt{ab} \sqcup\!\sqcup \mathtt{a} = \mathtt{aba} \neq \mathtt{baa} = \mathtt{a} \sqcup\!\sqcup \mathtt{ba} = \mathtt{a} \sqcup\!\sqcup (\mathtt{b} \sqcup\!\sqcup \mathtt{a}).$$

c) **IA:** Wenn $w \in A^0$ ist, dann $w = \varepsilon$. Damit ist $w \sqcup\!\sqcup w = \varepsilon \sqcup\!\sqcup \varepsilon = \varepsilon$, also $|w \sqcup\!\sqcup w| = 0 = 2|w|$.

IS: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und es gelte die

IV: Für jedes $w \in A^n$ gilt $|w \sqcup\!\sqcup w| = 2|w|$.

Zu zeigen ist, dass für jedes $w' \in A^{n+1}$ gilt: $|w' \sqcup\!\sqcup w'| = 2|w'|$.
Es sei $w' \in A^{n+1}$. Damit gibt es $w \in A^n$ und $x \in A$ mit $w' = wx$. Ferner ist $w' \sqcup\!\sqcup w' = (w \sqcup\!\sqcup w)xx$. Es gilt also

$$|w' \sqcup\!\sqcup w'| = |(w \sqcup\!\sqcup w)xx| = |w \sqcup\!\sqcup w| + 2 \overset{\text{IV}}{=} 2|w| + 2 = 2(|w| + 1) = 2|w'|,$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 4.2 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Für jede der folgenden Bedingungen B_i (wobei $i \in \{1, 2, 3\}$) sei L_i die Sprache $L_i = \{w \in A^* \mid \text{für } w \text{ gilt } B_i\}$. Geben Sie für jedes L_i einen formalen Mengenausdruck an, der genau L_i beschreibt. Verwenden Sie hierfür *ausschließlich* folgende Zeichen:

$$\mathtt{a} \quad \mathtt{b} \quad \{ \quad \} \quad (\quad) \quad , \quad * \quad \cdot \quad \cup$$

Insbesondere dürfen Sie das Zeichen „ε“ nicht verwenden. Andererseits können Sie die leere Menge als „$\{\}$“ notieren.

a) B_1: „$|w| \geq 2$ und $w(0) = w(1)$“
b) B_2: „$|w| \neq 1$“

c) B_3: „$w \in L_1$ oder $w \notin L_2$"

Lösung 4.2

a) $L_1 = \{\mathtt{aa}, \mathtt{bb}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$
b) $L_2 = \{\}^* \cup \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$
c) $L_3 = \{\mathtt{aa}, \mathtt{bb}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \cup \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

Aufgabe 4.3 (1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

Eine Sprache $L \subseteq A^*$ sei wie folgt induktiv definiert:

- $\varepsilon \in L$
- wenn $x \in L$ ist, dann ist $\mathtt{aa}x \in L$
- wenn $y, z \in L$ sind, dann ist $y\mathtt{b}z \in L$

L enthalte sonst keine Wörter aus A^*.

a) Geben Sie alle Wörter $w \in L$ an, für die $|w| \leq 3$ ist.
b) Eine der folgenden zwei Behauptungen ist falsch. Widerlegen Sie sie.
   - Wenn es $x \in A^*$ gibt, sodass $\mathtt{aa}x \in L$ ist, dann muss $x\mathtt{aa} \in L$ sein.
   - Wenn es $y, z \in A^*$ mit $y\mathtt{b}z \notin L$ gibt, so muss sowohl $y \notin L$ als auch $z \notin L$ sein.
c) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass ein Wort $w \in A^*$ in L ist, wenn in w das Zeichen $\mathtt{b}$

   (i) nirgends (ii) genau einmal (iii) genau zweimal

   vorkommt. In Ihrer Antwort dürfen Sie dabei keinen Bezug auf L nehmen. (Sie dürfen sich aber auf Ihre andere Antworten beziehen.)

Lösung 4.3

Es gilt $L = \{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^*$.

a) ε, b, aa, bb, aab, baa, bbb
b) Die zweite Behauptung stimmt nicht. Man betrachte z. B. $y = \mathtt{aab}$ und $z = \mathtt{a}$; dann ist $y\mathtt{b}z \notin L$, aber $y \in L$.
   Die erste ist übrigens korrekt.
c) (i) $w \in \{\mathtt{aa}\}^*$
   (ii) $w = y\mathtt{b}z$, wobei $y, z \in \{\mathtt{aa}\}^*$ beliebig sind
   (iii) $w = y\mathtt{b}z$, wobei entweder $y \in \{\mathtt{aa}\}^*$ und $z \in L_1$ oder $y \in L_1$ und $z \in \{\mathtt{aa}\}^*$. Dabei ist L_1 die Menge der Wörter, die die in (ii) beschriebene Eigenschaft haben.

Aufgabe 4.4 (1 + 1 + 4 = 6 Punkte)

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn für eine Sprache $L \subseteq A^*$ die Gleichung $L = L^2$ gilt, dann muss L unendlich sein.
b) Geben Sie Sprachen $L_1, L_2 \subseteq A^*$ an, sodass $L_1 \neq L_2$ aber $L_1 L_2^2 = L_1^2 L_2$ ist.
c) Es seien $L_1, L_2 \subseteq A^*$ beliebige Sprachen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über i:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : \quad (L_1 \cup L_2)^i \subseteq (L_1^* L_2^*)^*.$$

   Tipp. Es gilt $(L_1^* L_2^*)^* = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} (L_1^* L_2^*)^j$.

Lösung 4.4

a) Nein, da z. B. $\{\varepsilon\}^2 = \{\varepsilon\}$ oder auch $\varnothing^2 = \varnothing$.
b) Z. B. $L_1 = \varnothing$ und $L_2 = \{\varepsilon\}$.
c) **IA:** Für $i = 0$ ist $(L_1 \cup L_2)^i = \{\varepsilon\} = (L_1^* L_2^*)^0 \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$.

   IS: Es sei $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Ferner gelte die

IV: $(L_1 \cup L_2)^i \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$.

Zu zeigen ist: $(L_1 \cup L_2)^{i+1} \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$.

Sei $w \in (L_1 \cup L_2)^{i+1}$. Damit gibt es $w' \in (L_1 \cup L_2)^i$ und $x \in L_1 \cup L_2$ mit $w = w'x$.

- Nach IV ist $w' \in (L_1^* L_2^*)^*$, also $w' \in (L_1^* L_2^*)^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.
- Wenn $x \in L_1$ ist, dann ist $x \in L_1 \subseteq L_1^* = L_1^* \{\varepsilon\} \subseteq L_1^* L_2^*$.
  „Analog:“ Wenn $x \in L_2$ ist, dann ist $x \in L_2 \subseteq L_2^* = \{\varepsilon\} L_2^* \subseteq L_1^* L_2^*$.
- also ist $w = w'x \in (L_1^* L_2^*)^k (L_1^* L_2^*) \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$