Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 7
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	
Tutor*in:	

Ausgabe: 16. Dezember 2020

Abgabe: 12. Januar 2021, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 7:	/ 22
Blätter 7 – 7:	/ 22

Hinweis. Ab diesem Aufgabenblatt sind alle Lösungen einzeln (und nicht mehr in Zweiergruppen) abzugeben.

Aufgabe 7.1 (2 + 2 = 4 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Gleichungen für $L \subseteq A^*$ jeweils mindstens eine Lösung besitzen:

a) $L = \{\varepsilon\} \cup \{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{b}\}$
b) $L = \{\varepsilon\} \cup L\{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{a}\}$

Wenn Sie eine Lösung für eine der Gleichungen angeben, dann müssen Sie auch zeigen, dass sie korrekt ist. Für die ledigliche Angabe einer Lösung werden keine Punkte vergeben.

Lösung 7.1

a) $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ erfüllt die Gleichung, denn:
- Wenn $w \in L$ ist, dann gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ mit $w = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$. Damit ist entweder $w = \varepsilon$ oder $w = \mathtt{a}w'\mathtt{b}$, wobei $w' = \mathtt{a}^{n-1}\mathtt{b}^{n-1} \in L$ ist.
- Ist $w = \varepsilon$, so ist offensichtlich $w \in L$. Ist $w \in \{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{b}\}$, so gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ mit $w = \mathtt{a}\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{b} = \mathtt{a}^{n+1}\mathtt{b}^{n+1} \in L$.

b) $L = \{\mathtt{a}^{3n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ erfüllt die Gleichung, denn:
- Wenn $w \in L$ ist, dann gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ mit $w = \mathtt{a}^{3n}$. Damit ist entweder $n = 0$ und $w = \varepsilon$ oder $n \geq 1$ und $w = \mathtt{a}^{3(n-1)}\mathtt{a}\mathtt{a}^{3\cdot 0}\mathtt{a}\mathtt{a}^{3\cdot 0}\mathtt{a} \in L\{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{a}\}$.
- Ist $w = \varepsilon$, so ist offensichtlich $w \in L$. Ist $w \in L\{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{a}\}L\{\mathtt{a}\}$, so gibt es $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$ mit $w = \mathtt{a}^{3n_1}\mathtt{a}\mathtt{a}^{3n_2}\mathtt{a}\mathtt{a}^{3n_3}\mathtt{a} = \mathtt{a}^{3(n_1+n_2+n_3+1)} \in L$.

Aufgabe 7.2 (1.5 + 1.5 + 2 = 5 Punkte)
Es sei die Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, X\}$, $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, und

$$P = \{S \to \mathtt{a}S, X \to \mathtt{b}X\}$$

gegeben.

a) Geben Sie für jede der Produktionsmengen P_i (wobei $i \in \{1, 2, 3\}$) an, was die von der Grammatik $G_i = (N, T, S, P \cup P_i)$ erzeugten Sprache $L(G_i)$ ist:
   (i) $P_1 = \{S \to X\}$
   (ii) $P_2 = \{S \to X, X \to \varepsilon\}$
   (iii) $P_3 = \{S \to X\mathtt{b}, X \to \mathtt{b}\}$

b) Geben Sie eine Menge P' von höchstens 3 Produktionen (also $|P'| \leq 3$) an, sodass für die Grammatik $G' = (N, T, S, P \cup P')$ gilt: $L(G') = \{\mathtt{a}\}^+\{\mathtt{ba}\}\{\mathtt{b}\}^+$.

c) Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt eine Menge P'' von Produktionen, sodass für die Grammatik $G'' = (N, T, S, P \cup P'')$ gilt: $L(G'') = \{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^*$.

Lösung 7.2

a) (i) $L(G_1) = \varnothing$
   (ii) $L(G_2) = \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}^*$
   (iii) $L(G_3) = \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{bb}\}\{\mathtt{b}\}^*$

b) Z. B. $P' = \{S \to \mathtt{aba}X, X \to \mathtt{b}\}$

c) Es gibt keine solche Menge P''. Denn für jedes Wort $w \in L(G'')$ gilt ja $S \Rightarrow^* w$. Also ist damit auch $\mathtt{a}w \in L(G'')$, weil $S \Rightarrow \mathtt{a}S \Rightarrow^* \mathtt{a}w$. Das heißt, ist z. B. $\varepsilon \in L(G'')$, so muss auch $\mathtt{a} \in L(G'')$ sein. Da $\varepsilon \in \{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}^*$ aber $\mathtt{a} \notin \{\mathtt{aa}, \mathtt{b}\}$, so kann es also keine solche Menge P'' geben.

Aufgabe 7.3 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L_i (wobei $i \in \{1, 2, 3\}$) eine kontextfreie Grammatik $G_i = (N_i, T, S_i, P_i)$ mit $T = Z_3$ an, für die $L(G_i) = L_i$ gilt. Verwenden Sie dabei höchstens $i + 1$ Nichtterminalsymbole (also $|N_i| \leq i + 1$).

a) $L_1 = \{w \in Z_3^* \mid \mathrm{Num}_3(w) \ \mathbf{mod}\ 3 = 0\}$

b) $L_2 = \{w \in Z_3^* \mid (\mathrm{Num}_3(w) \ \mathbf{div}\ 9) \ \mathbf{mod}\ 3 = 2\}$

c) $L_3 = \{w \in Z_3^* \mid \mathrm{Num}_3(w) \ \mathbf{div}\ 9 > 0\}$

Lösung 7.3

a) leeres Wort und alle Wörter, die mit 0 enden, also
$N_1 = \{S_1, X\}$ und $P_1 = \{S_1 \to X \mid \varepsilon, X \to \mathtt{0}X \mid \mathtt{1}X \mid \mathtt{2}X \mid \mathtt{0}\}$

b) alle Wörter mit einer 2 an dritter Position von rechts, also
$N_2 = \{S_2, X\}$ und $P_2 = \{S_2 \to XS_2 \mid \mathtt{2}XX, X \to \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid \mathtt{2}\}$

c) alle Wörter, die an der dritten Position von rechts oder weiter links eine 1 oder eine 2 stehen haben, also
$N_3 = \{S_3, X, Y\}$ und $P_3 = \{S_3 \to Y\mathtt{1}YXX \mid Y\mathtt{2}YXX,\ Y \to XY \mid \varepsilon,\ X \to \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid \mathtt{2}\}$

Aufgabe 7.4 (1.5 + 1.5 + (2 + 2) = 7 Punkte)

Es sei die Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit $N = \{S, X\}$, $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, und

$$P = \{S \to \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid X, X \to X\mathtt{bb} \mid S \mid \varepsilon\}$$

gegeben.

a) Geben Sie jedes Wort $w \in L(G)$ an, für das $|w| \leq 4$ ist.

b) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum zu einem Wort $w \in L(G)$ Ihrer Wahl, für das $|w| = 10$ ist.

c) Zeigen oder widerlegen Sie:

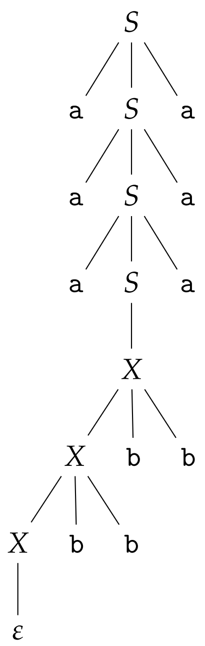
(i) Es gibt einen Homomorphismus $h\colon T^* \to T^*$, sodass $h(T^*) = L(G)$ ist.

(ii) Es gibt einen Homomorphismus $h\colon T^* \to T^*$, sodass $h(L(G)) = T^*$ ist.

Lösung 7.4

a) ε, aa, bb, aabb, abba, aaaa, bbbb

b) Es gibt mehrere Lösungen. Ein Beispiel ist der folgende Baum zu aaabbbbaaa:



c) (i) Die Aussage ist **falsch**. Widerlegung: sei h Homomorphismus, sodass es $w_{\mathtt{aa}}, w_{\mathtt{bb}} \in T^*$ mit $h(w_{\mathtt{aa}}) = \mathtt{aa}$ und $h(w_{\mathtt{bb}}) = \mathtt{bb}$ gibt. Dann ist z. B. $h(w_{\mathtt{bb}} w_{\mathtt{aa}}) = \mathtt{bbaa} \in h(T^*)$ aber nicht in $L(G)$. Daher gibt es kein h mit $h(T^*) = L(G)$.

(ii) Die Aussage ist ebenfalls **falsch**. Sei h ein Homomorphismus. Ist $h(\mathtt{a}) = \varepsilon$, so ist $h(L(G)) \subseteq \{h(\mathtt{b})\}^* \neq T^*$. Analog gilt: Ist $h(\mathtt{b}) = \varepsilon$, so ist $h(L(G)) \subseteq \{h(\mathtt{a})\}^* \neq T^*$. Gilt sowohl $h(\mathtt{a}) \neq \varepsilon$ als auch $h(\mathtt{b}) \neq \varepsilon$, dann haben wir $|h(x)| \geq 1$ für jedes $x \in T$ und damit nach Teilaufgabe a) $|h(w)| \geq 2$ für jedes $w \in L(G) \setminus \{\varepsilon\}$. Weil $h(\varepsilon) = \varepsilon$ sein muss (da h Homomorphismus), so gibt es also kein $w \in L(G)$, sodass $h(w) = \mathtt{a}$ (oder auch $h(w) = \mathtt{b}$) ist.