Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 10

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: 20. Januar 2021

Abgabe: 2. Februar 2021, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 10:	/ 21
Blätter 7 – 10:	/ 79

Hinweis: Auf den Aufgabenblättern 7 bis 11 wird man insgesamt genau 100 Punkte erreichen können. Wer den Übungsschein erwerben will, kann dies also nur dann sicher schaffen, wenn in diesem zweiten Teil mindestens 50 Punkte erreicht werden. Es *kann* sein (muss aber nicht), dass am Ende die Punktegrenze etwas gesenkt wird.

Aufgabe 10.1 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
Der Graph $G = (V, E)$ sei ein Baum.

a) Angenommen $|V| = 5$, wie viele Blätter hat G mindestens? Und wie viele höchstens?
b) Zeichnen Sie zu den Werten, die Sie in Teilaufgabe a) angegeben haben, jeweils einen Beispielgraphen, der so viele Blätter hat. Sie dürfen dabei davon ausgehen, dass $V = \mathbb{Z}_5$ ist. Kennzeichen Sie die Wurzel des Baumes sowie alle dessen Blätter deutlich.
c) Es sei G ein beliebiger Baum. Zeigen Sie: Wenn ein Knoten $v \in V$ gleichzeitig eine Wurzel und ein Blatt ist, dann muss $|V| = 1$ gelten.
Tipp. Um eine Aussage der Form $A \to B$ zu zeigen, kann es manchmal praktischer sein, es stattdessen für $(\neg B) \to (\neg A)$ zu tun.

Aufgabe 10.2 (1 + 2 + 1 + 2 = 6 Punkte)
Für zwei Graphen $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ ist das *Tensor-Produkt* $G \otimes H$ von G und H der Graph mit Knotenmenge $V_G \times V_H$ und Kantenmenge gleich

$$\{((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \mid (g_1, g_2) \in E_G \text{ und } (h_1, h_2) \in E_H\}.$$

Es sei zunächst $V_G = V_H = \{1, 2\}$, $E_G = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ und $E_H = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

a) Zeichnen Sie $G \otimes H$.
b) Geben Sie die Adjazenzmatrizen von G, H und $G \otimes H$ an. Welchen nichttrivialen Zusammenhang erkennen Sie zwischen diesen Matrizen?

Es seien jetzt G und H beliebig.

c) Wie viele Knoten hat $G \otimes H$? Und wie viele Kanten? Begründen Sie Ihre Antwort.
d) Geben Sie einen Graphen H an, sodass für jeden Graphen G das Produkt $G \otimes H$ zu G isomorph ist. Geben Sie anschließend einen Isomorphismus $f \colon V_G \times V_H \to V_G$ an und begründen Sie, warum f ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 10.3 (2 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $G_n = (L_n \cup R_n, E_n)$ der Graph mit $L_n = A^n$, $R_n = \mathbb{Z}_n \times A$ und

$$E_n = \{(w, (i, x)) \in L_n \times R_n \mid w(i) = x\}.$$

a) Zeichnen Sie G_0, G_1 und G_2. Kennzeichnen Sie bei jedem Knoten deutlich, ob es L_n oder R_n gehört.

Für $w \in L_n$ und $x, y \in L_n$ beliebig führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

- $E_n(w) = \{r \in R_n \mid (w, r) \in E_n\}$ und
- $S_n(x, y) = |E_n(x) \cap E_n(y)|$.

Es gilt also insbesondere $|E_n(w)| = d(w) = |w| = n$.

b) Es sei $n = 4$ und $x = \mathtt{abba}$. Geben Sie jedes Wort $y \in L_n$ an, für das gilt:

(i) $S_n(x, y) = n$ (ii) $S_n(x, y) = 0$ (iii) $S_n(x, y) = 1$

c) Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in L_n$ wieder beliebig. Was besagt der Wert $S_n(x, y)$ über x und y?
Tipp. Was müssen Sie an x „ändern", damit y entsteht?

d) Wählen Sie einen der Fälle
(F1) $S_n(x, y) = n$ oder (F2) $S_n(x, y) = 0$
aus und begründen Sie, warum Ihre Antwort zu Teilaufgabe c) im Fall F1 bzw. F2 korrekt ist.

Aufgabe 10.4 (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

Für einen Graphen $G = (V, E)$ heißt $f\colon V \to V$ einen (*Graph-*)*Automorphismus* von G, wenn Folgendes gilt:

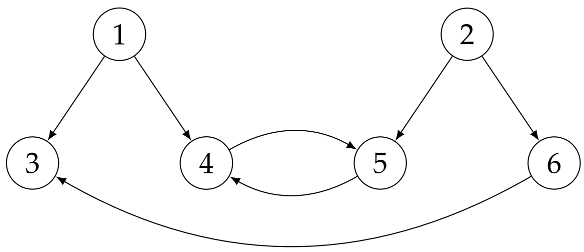
$$\forall x, y \in V : \quad (x, y) \in E \text{ gdw. } (f(x), f(y)) \in E.$$

Ein Automorphismus ist damit ein Isomorphismus von einem Graphen zu sich selbst.

a) Geben Sie für $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ alle Automorphismen von G an.

b) Zeigen Sie: Ist f ein Automorphismus, so erhält f die Knotengrade eines Knoten, das heißt, es gilt $d^-(x) = d^-(f(x))$ sowie $d^+(x) = d^+(f(x))$ für jeden $x \in V$.

c) Ein Graph G heißt *asymmetrisch*, wenn der einzige Automorphismus von G die Identität I_V ist. Zeigen Sie, dass der folgende Graph asymmetrisch ist:



Tipp. Verwenden Sie Teilaufgabe b).