

Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 10

Lösungsvorschläge

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium Nr.: Tutor*in:

Ausgabe: 20. Januar 2021

Abgabe: 2. Februar 2021, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 10: / 21

Blätter 7 – 10: / 79

Hinweis: Auf den Aufgabenblättern 7 bis 11 wird man insgesamt genau 100 Punkte erreichen können. Wer den Übungsschein erwerben will, kann dies also nur dann sicher schaffen, wenn in diesem zweiten Teil mindestens 50 Punkte erreicht werden. Es *kann* sein (muss aber nicht), dass am Ende die Punktegrenze etwas gesenkt wird.

Aufgabe 10.1 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)

Der Graph $G = (V, E)$ sei ein Baum.

- Angenommen $|V| = 5$, wie viele Blätter hat G mindestens? Und wie viele höchstens?
- Zeichnen Sie zu den Werten, die Sie in Teilaufgabe a) angegeben haben, jeweils einen Beispielgraphen, der so viele Blätter hat. Sie dürfen dabei davon ausgehen, dass $V = \mathbb{Z}_5$ ist. Kennzeichnen Sie die Wurzel des Baumes sowie alle dessen Blätter deutlich.
- Es sei G ein beliebiger Baum. Zeigen Sie: Wenn ein Knoten $v \in V$ gleichzeitig eine Wurzel und ein Blatt ist, dann muss $|V| = 1$ gelten.
Tipp. Um eine Aussage der Form $A \rightarrow B$ zu zeigen, kann es manchmal praktischer sein, es stattdessen für $(\neg B) \rightarrow (\neg A)$ zu tun.

Lösung 10.1

- G hat mindestens 1 und höchstens 4 Blätter.
-



In beiden Graphen ist die Wurzel die 0. Im linken Graphen sind die Blätter die Knoten 1, 2, 3 und 4, während im rechten ausschließlich 4 ein Blatt ist.

- Wie vom Tipp empfohlen, zeigen wir: Wenn $|V| > 1$ ist, dann kann eine Wurzel kein Blatt sein.
 Es sei $w \in V$ die eindeutige Wurzel von G . Weil $|V| > 1$ ist, so gibt es ein $v \in V$ mit $v \neq w$. Weil w Wurzel ist, so muss es ein Pfad von w nach v geben. Wegen $v \neq w$ hat dieser Pfad Länge mindestens 1, also muss w selber Ausgangsgrad mindestens 1 haben, sprich w darf kein Blatt sein.

Aufgabe 10.2 (1 + 2 + 1 + 2 = 6 Punkte)

Für zwei Graphen $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ ist das *Tensor-Produkt* $G \otimes H$ von G und H der Graph mit Knotenmenge $V_G \times V_H$ und Kantenmenge gleich

$$\{((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \mid (g_1, g_2) \in E_G \text{ und } (h_1, h_2) \in E_H\}.$$

Es sei zunächst $V_G = V_H = \{1, 2\}$, $E_G = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ und $E_H = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

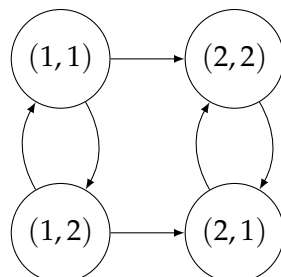
- Zeichnen Sie $G \otimes H$.
- Geben Sie die Adjazenzmatrizen von G , H und $G \otimes H$ an. Welchen nichttrivialen Zusammenhang erkennen Sie zwischen diesen Matrizen?

Es seien jetzt G und H beliebig.

- c) Wie viele Knoten hat $G \otimes H$? Und wie viele Kanten? Begründen Sie Ihre Antwort.
 d) Geben Sie einen Graphen H an, sodass für jeden Graphen G das Produkt $G \otimes H$ zu G isomorph ist. Geben Sie anschließend einen Isomorphismus $f: V_G \times V_H \rightarrow V_G$ an und begründen Sie, warum f ein Isomorphismus ist.

Lösung 10.2

a)



$$b) \bullet A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bullet A_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \bullet A_{G \otimes H} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Bei der gewählten Reihenfolge der Knoten entsteht die Adjazenzmatrix von $G \otimes H$, indem man jeden 1-Eintrag in der Adjazenzmatrix von G durch die Adjazenzmatrix von H ersetzt. ($G \otimes H$ ist das sogenannte *Kronecker-Produkt* der Matrizen G und H .)
 Schreibt man $A_{G \otimes H}$ in der Form

$$A_{G \otimes H} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1,1) & (2,1) & (1,2) & (2,2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1,1) \\ (2,1) \\ (1,2) \\ (2,2) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

dann entsteht die Adjazenzmatrix von $G \otimes H$, indem man jeden 1-Eintrag in der Adjazenzmatrix von H durch die Adjazenzmatrix von G ersetzt.

- c) $|V_G| |V_H|$ Knoten und $|E_G| |E_H|$ Kanten. Das gilt für die Knoten, weil $|A \times B| = |A| |B|$ für beliebige, endliche Mengen A und B gilt. Für die Kanten: Die folgende Abbildung ist eine Bijektion zwischen der Kantenmenge $E_{G \otimes H}$ von $G \otimes H$ und $E_G \times E_H$:

$$b: \begin{cases} E_{G \otimes H} \rightarrow E_G \times E_H \\ ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \rightarrow ((g_1, g_2), (h_1, h_2)). \end{cases}$$

- d) $V_H = \{1\}$ und $E_H = \{(1,1)\}$. f sei für jedes $g \in V_G$ durch $f(g,1) = g$ gegeben. Das ist ein Isomorphismus, weil f bijektiv ist (denn $f^{-1}: V_G \rightarrow V_G \times V_H$ mit $f^{-1}(g) = (g,1)$ ist die Umkehrabbildung von f) und für $g_1, g_2 \in V_G$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned} ((g_1, 1), (g_2, 1)) \in E_{G \otimes H} & \text{ gdw. } (g_1, g_2) \in E_G \wedge (1, 1) \in E_H \\ & \text{ gdw. } (g_1, g_2) \in E_G \\ & \text{ gdw. } (f(g_1, 1), f(g_2, 1)) \in E_G \end{aligned}$$

Aufgabe 10.3 (2 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Es sei $A = \{a, b\}$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $G_n = (L_n \cup R_n, E_n)$ der Graph mit $L_n = A^n$, $R_n = \mathbb{Z}_n \times A$ und

$$E_n = \{(w, (i, x)) \in L_n \times R_n \mid w(i) = x\}.$$

- a) Zeichnen Sie G_0, G_1 und G_2 . Kennzeichnen Sie bei jedem Knoten deutlich, ob es L_n oder R_n gehört.

Für $w \in L_n$ und $x, y \in L_n$ beliebig führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

- $E_n(w) = \{r \in R_n \mid (w, r) \in E_n\}$ und
- $S_n(x, y) = |E_n(x) \cap E_n(y)|$.

Es gilt also insbesondere $|E_n(w)| = d(w) = |w| = n$.

- b) Es sei $n = 4$ und $x = abba$. Geben Sie jedes Wort $y \in L_n$ an, für das gilt:

- (i) $S_n(x, y) = n$ (ii) $S_n(x, y) = 0$ (iii) $S_n(x, y) = 1$

- c) Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in L_n$ wieder beliebig. Was besagt der Wert $S_n(x, y)$ über x und y ?

Tipp. Was müssen Sie an x „ändern“, damit y entsteht?

- d) Wählen Sie einen der Fälle

- (F1) $S_n(x, y) = n$ oder (F2) $S_n(x, y) = 0$

aus und begründen Sie, warum Ihre Antwort zu Teilaufgabe c) im Fall F1 bzw. F2 korrekt ist.

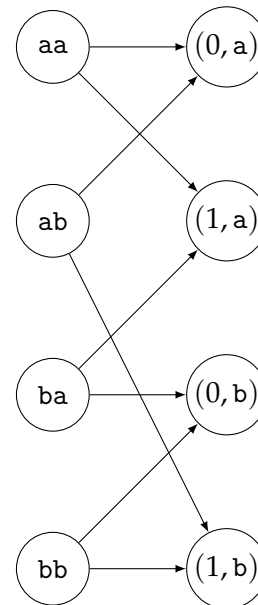
Lösung 10.3

- a) Bei G_0 ist R_0 leer; ansonsten sind links die Knoten aus L_n , rechts die aus R_n :

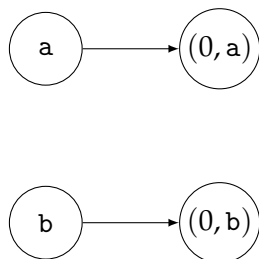
- G_0 :



- G_2 :



- G_1 :



- b) (i) abba

- (ii) baab

- (iii) aaab, bbab, babb, baaa

- c) $S_n(x, y)$ ist die Anzahl der Stellen, an denen x und y übereinstimmen

oder $n - S_n(x, y)$ ist die Anzahl Stellen, die man an x ändern muss, damit y entsteht.

- d) Wir zeigen das für den Fall F1. In diesem Fall müssen dann x und y insgesamt n Stellen gemeinsam haben. Da $|x| = |y| = n$, muss das heißen: $x = y$.
 Es seien $x, y \in L_n$ beliebig. Dann gilt $n = S_n(x, y) = |E_n(x) \cap E_n(y)|$. Da $|E_n(x)| = |E_n(y)| = n$, folgt $E_n(x) = E_n(y)$. Damit ist $(x, (i, z)) \in E_n$ genau dann, wenn $(y, (i, z))$ ist, sprich es gilt $x(i) = z$ genau dann, wenn $y(i) = z$ ist. Damit folgt, dass $x(i) = y(i)$ für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ ist, das heißt, $x = y$.

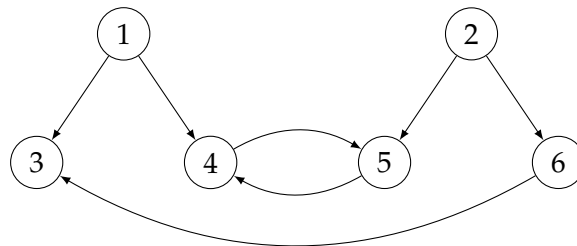
Aufgabe 10.4 (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

Für einen Graphen $G = (V, E)$ heißt $f: V \rightarrow V$ einen (Graph-)Automorphismus von G , wenn Folgendes gilt:

$$\forall x, y \in V : (x, y) \in E \text{ gdw. } (f(x), f(y)) \in E.$$

Ein Automorphismus ist damit ein Isomorphismus von einem Graphen zu sich selbst.

- Geben Sie für $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ alle Automorphismen von G an.
- Zeigen Sie: Ist f ein Automorphismus, so erhält f die Knotengrade eines Knoten, das heißt, es gilt $d^-(x) = d^-(f(x))$ sowie $d^+(x) = d^+(f(x))$ für jeden $x \in V$.
- Ein Graph G heißt *asymmetrisch*, wenn der einzige Automorphismus von G die Identität I_V ist. Zeigen Sie, dass der folgende Graph asymmetrisch ist:



Tip. Verwenden Sie Teilaufgabe b).

Lösung 10.4

- G hat insgesamt 4 Automorphismen:
 - $f_1 = I_V$
 - $f_2 = \{(1, 2), (2, 1)\} \cup I_{\{3, 4\}}$
 - $f_3 = I_{\{1, 2\}} \cup \{(3, 4), (4, 3)\}$
 - $f_4 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$
- Es sei f ein Automorphismus von G und $x \in V$ beliebig. Dazu sei $N(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$ die Menge der Nachbarn von x . Wegen $d^+(x) = |N(x)|$ genügt es zu zeigen, dass $|N(x)| = |N(f(x))|$ ist. Das gilt wiederum, weil
 - genau dann $(x, y) \in E$, wenn $(f(x), f(y)) \in E$ ist, und
 - f bijektiv ist, also aus verschiedenen (x, y) verschiedene $(f(x), f(y))$ „entstehen“.
 Der Beweis für $d^-(x) = d^-(f(x))$ verläuft analog wie folgt: Man definiere die Menge der Nachbarn als $N(x) = \{y \in V \mid (y, x) \in E\}$ und ersetze d^+ durch d^- . Die Behauptung folgt dann aus folgender Äquivalenz: Es gilt $(y, x) \in E$ genau dann, wenn $(f(y), f(x)) \in E$.
- Es sei f ein Automorphismus von G .

- Nach Teilaufgabe b) sehen wir ein, dass $f(3) = 3$ und $f(6) = 6$ sein muss, da 3 der einzige Knoten mit Ausgangsgrad gleich 0 in G ist und 6 der einzige mit sowohl Eingangsgrad als auch Ausgangsgrad gleich 1.
- Weil $(1,3) \in E$ gdw. $(f(1), f(3)) = (f(1), 3) \in E$ und $f(1) \neq f(6) = 6$ ist, so folgt $f(1) = 1$.
- Weil $(2,6) \in E$ gdw. $(f(2), f(6)) = (f(2), 6) \in E$ und es eine einzige Kante nach 6 gibt, so ist $f(2) = 2$.
- $(1,4) \in E$ impliziert $(f(1), f(4)) = (1, f(4)) \in E$. Wegen $f(4) \neq f(3) = 3$ ist also $f(4) = 4$.
- f ist bijektiv, also muss $f(5)$ der letzte Knoten sein: $f(5) = 5$.

Wir stellen fest: $f = I_V$ ist der einzige Automorphismus von G .