Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 11
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: 27. Januar 2021

Abgabe: 9. Februar 2021, 12:00 Uhr
durch Hochladen in den Ilias-Kurs

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind und
- rechtzeitig
- mit dieser Seite als Deckblatt
- gescannt oder fotografiert mit allen Seiten in *einer* Pdf-Datei

ins Ilias-System hochgeladen werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 11:	/ 21
Blätter 7 – 11:	/ 100

Aufgabe 11.1 **(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 Punkte)**
Der ebenso geniale wie grausige Superbösewicht Doktor Meta ist zurück! Das letzte Mal, das wir ihn gesehen haben, wollte er zum Fasching den KIT-Campus mit klebriger Konfetti-Marmelade beschmieren. Seit einigen Monaten hat er sich aber zum Home-Office in seinem Hochsicherheitsbunker verschanzt, um dort den nächsten Unfug zu planen. Der soll bestimmt wieder furchtbar werden.

Aber die Hoffnung ist noch nicht verloren! Denn vor Kurzem hat sich Theorie-Man, Doktor Metas unerbittlicher Widersacher, Zugriff zu einem (leider nicht maßstabgetreuen) Plan von Doktor Metas Bunker beschafft. Der Plan ist in Form eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gegeben. Die Räume sind dabei jeweils mit 3 Bits codiert und entsprechen also den Knoten der Menge $V = A^3$, wobei $A = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ ist. Manche Räume sind aber mit schrecklichen Fallen versehen. Sie bilden die Menge $F \subseteq V$, während $S = V \setminus F$ die Menge der sicheren Räume ist. Die Kantenmenge E stellt die Verbindungsgänge zwischen den Räumen dar und ist durch

$$E = \{\{xw, wy\} \mid x, y \in A, w \in A^2 \text{ und } y = f(x)\}$$

definiert, wobei $f\colon A \to A$ die Abbildung mit $f(\mathtt{0}) = \mathtt{1}$ und $f(\mathtt{1}) = \mathtt{0}$ ist.

a) Zeichnen Sie den Graphen G. Beschriften Sie alle Knoten.
b) Enthält G Schlingen? Begründen Sie Ihre Antwort *anhand der Definition* von E (d. h. nicht durch Verweis auf Ihr Bild in Teil a)).
c) Der Knoten $e = \mathtt{000} \in S$ ist der einzige Eingang zum Bunker. Geben Sie alle Knoten an, die von e aus erreichbar sind.
d) Doktor Metas Büro ist der Raum $b = \mathtt{110} \in S$. Wie viele Knoten dürfen höchstens in F sein, damit es sicher mindestens einen Weg zwischen e und b gibt, der über keinem Knoten aus F verläuft? Begründen Sie Ihre Antwort.

Laut einer aktuelleren Version des Planes ist eine gewisse Anzahl an Geheimgängen dem Bunker hinzugekommen. Diese werden durch folgende Menge beschrieben:

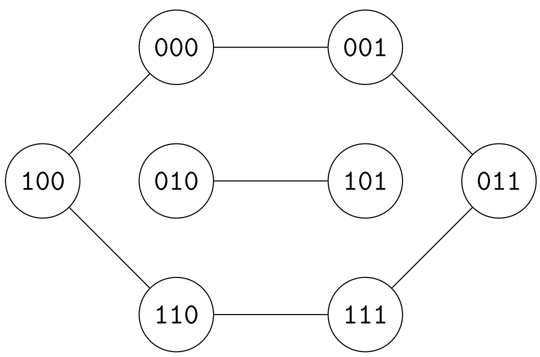
$$E' = \{\{xw, wx\} \mid x \in A, w \in A^2 \text{ und } xw \neq wx\}.$$

Wir betrachten also jetzt den Graphen $G' = (V, E \cup E')$.

e) Zeichnen Sie den Graphen G'. Beschriften Sie alle Knoten.
f) Ist G' ein Baum? Begründen Sie Ihre Antwort.
g) In G' gibt es (mindestens) einen Knoten $v \in V$ mit einer besonderen Eigenschaft: Für jedes $i \in \mathbb{N}_+$, $2 \leq i \leq 8$, gibt es einen wiederholungsfreien Kreis der Länge i, der über v verläuft. Nennen Sie einen solchen Knoten v und geben Sie anschließend für jedes solches i einen entsprechenden solchen Kreis.

Lösung 11.1

a)



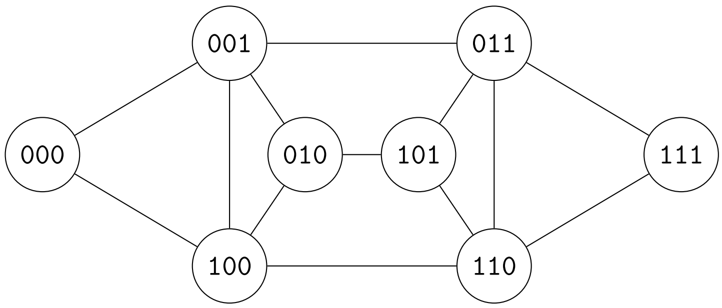
b) Nein. Es seien $x, y \in A$ und $w \in A^2$. Wenn $xw = wy$ ist, dann gilt:
   - $x = (xw)(0) = (wy)(0) = w(0)$
   - $w(0) = (xw)(1) = (wy)(1) = w(1)$
   - $w(1) = (xw)(2) = (wy)(2) = y$

   Das kann also nur der Fall sein, wenn $x = y$ ist. Das ist für die Kanten in E nicht gegeben, weil stets $y = f(x) \neq x$ ist.

c) `000`, `001`, `011`, `111`, `110`, `100`

d) Maximal einer, denn:
   - Für $F = \{\texttt{001}, \texttt{100}\}$ muss jeder Weg von e aus über einem Knoten aus F gehen (da diese die Nachbarn von e sind).
   - Die Wege $(e, \texttt{100}, b)$ und $(e, \texttt{001}, \texttt{011}, \texttt{111}, b)$ haben nur die Knoten e und b gemeinsam. Also reicht $|F| = 1$ nicht aus, um zu zwingen, dass man einen Knoten aus F besuchen muss.

e)



f) Nein, da z. B. $(\texttt{001}, \texttt{010}, \texttt{100}, \texttt{001})$ ein einfacher Kreis ist.

g) Die Eigenschaft gilt sogar für *jeden* Knoten $v \in V$. Hier sind Beispiele für Kreise, die über `010` verlaufen:

$i = 2$: $(\texttt{010}, \texttt{101}, \texttt{010})$

$i = 3$: $(\texttt{010}, \texttt{100}, \texttt{001}, \texttt{010})$

$i = 4$: $(\texttt{010}, \texttt{100}, \texttt{000}, \texttt{001}, \texttt{010})$

$i = 5$: $(\texttt{010}, \texttt{101}, \texttt{110}, \texttt{100}, \texttt{001}, \texttt{010})$

$i = 6$: $(\texttt{010}, \texttt{101}, \texttt{110}, \texttt{011}, \texttt{001}, \texttt{100}, \texttt{010})$

$i = 7$: $(\texttt{010}, \texttt{101}, \texttt{110}, \texttt{011}, \texttt{001}, \texttt{000}, \texttt{100}, \texttt{010})$

$i = 8$: $(\texttt{010}, \texttt{101}, \texttt{110}, \texttt{111}, \texttt{011}, \texttt{001}, \texttt{000}, \texttt{100}, \texttt{010})$

Aufgabe 11.2 (1.5 + 2.5 = 4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie kennengelernt, dass die Wegematrix W eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ als die Matrixdarstellung $A(E^*)$ der reflexiv-transitiven Hülle E^* definiert ist. Wir betrachten jetzt die Matrizen $W_i = A(E_i)$ für $i \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$E_i = \bigcup_{j=0}^{i} E^j$$

ist. (Verwechseln Sie nicht E_i mit E^i!) Man kann zeigen, dass $W = W_{|V|-1}$ gilt.

a) Geben Sie einen *streng zusammenhängenden* Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 4$ an, sodass $W = W_i$ für ein $i < 3$ ist. Geben Sie dazu noch W und i explizit an.

b) Geben Sie einen *streng zusammenhängenden* Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 4$ an, sodass $W \neq W_i$ für jedes $i < 3$ ist. Geben Sie dazu noch W sowie W_i für jedes $i < 3$ explizit an.

Lösung 11.2

a) Z. B. $V = \mathbb{Z}_4$ und $E = V \times V$. Für $i = 1$ ist dann

$$W = W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Z. B. $V = \mathbb{Z}_4$ und $E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$.

- $W_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $W = W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11.3 (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)

Für $i \in \{1, 2, 3\}$ seien die Funktionen $f_i \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wie folgt gegeben:

$$f_1(n) = n^2 \qquad f_2(n) = n^3 + 2n \qquad f_3(n) = 2^n$$

Geben Sie für jede der folgenden Mengen und jedes i an, ob f_i in der jeweiligen Menge liegt. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $O\left(n^4\right)$ b) $O\left(\sqrt{n^5 + n^4}\right)$ c) $O\left(3^{\sqrt{n}}\right)$ d) $n^3 + O\left(\frac{1}{\log(1+n)}\right)$

Hinweis. Bei Ihrer Begründung dürfen Sie sich auf die Eigenschaften stützen, die in der Vorlesung bewiesen wurden, oder auch ohne Beweis die O-Kalkül-Hierarchie verwenden, die in der Übung vorgestellt wurde.

Lösung 11.3

Wir nutzen die folgenden Eigenschaften aus:

E1 Für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ ist $n^a \in O\left(n^b\right)$ genau dann, wenn $a \leq b$ ist.

E2 Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ mit $b > 1$ ist $n^a \in O(b^n)$ und $b^n \notin O(n^a)$.

E3 Für Funktionen f und g gilt: Wenn $g \in \Theta(f)$ ist, dann ist $O(f) = O(g)$.

E4 Für jedes $a \in \mathbb{R}_+$ ist $\log(n) \in O(n^a)$.

Außerdem nutzen wir (ohne es jedes Mal anzugeben): wenn $g \in O(f)$, dann ist auch $O(g) \subseteq O(f)$ und $O(g + f) = O(f)$.

Aus den oberen Eigenschaften folgt $f_1 \in O(f_2)$ und $f_2 \in O(f_3)$. Ferner überlegen wir uns mittels Eigenschaften aus der Prädikatenlogik: Um $f \notin O(g)$ zu zeigen, ist es ausreichend, folgende Aussage zu beweisen:

$$\forall c \in \mathbb{R}_+ : \forall n_0 \in \mathbb{N}_+ : \exists n \geq n_0 : f(n) > cg(n).$$

a) Nach E1 ist $f_1 \in O\left(n^4\right)$ und $f_2 \in O\left(n^4\right)$. Nach E2 gilt dagegen $f_3 \notin O\left(n^4\right)$.
b) Es ist $\sqrt{n^5+n^4} = \sqrt{n^4(n+1)} = n^2\sqrt{n+1}$. Weil

$$n^2\sqrt{n+1} \geq n^2\sqrt{n} = n^{2.5} \qquad \text{sowie} \qquad n^2\sqrt{n+1} \leq n^2\sqrt{2n} = \sqrt{2}\cdot n^{2.5}$$

gilt, so folgt $\sqrt{n^5+n^4} \in \Theta\left(n^{2.5}\right)$ und nach E3 damit $O\left(\sqrt{n^5+n^4}\right) = O\left(n^{2.5}\right)$.
Nach E1 ist also $f_1 \in O\left(\sqrt{n^5+n^4}\right)$ und $f_2 \notin O\left(\sqrt{n^5+n^4}\right)$. Und nach E2 gilt $f_3 \notin O\left(\sqrt{n^5+n^4}\right)$.
c) Zuerst beobachten wir:

$$3^{\sqrt{n}} = \left(n^{\log_n 3}\right)^{\sqrt{n}} = n^{\sqrt{n}(\log 3)/(\log n)}.$$

Wegen E4 ist $\log n \in O\left(n^{1/4}\right)$, also gibt es $c \in \mathbb{R}_+$ und $n_0 \in \mathbb{N}_+$, $n_0 \geq 2$, mit $\log n \leq cn^{1/4}$ für jedes $n \geq n_0$. Wegen $\sqrt{n} = n^{1/2}$ folgt also:

$$n^{\sqrt{n}(\log 3)/(\log n)} \geq n^{\sqrt{n}(\log 3)/(cn^{1/4})} = n^{n^{1/4}(\log 3)/c}.$$

Weil $n^{1/4}$ unbeschränkt wächst, so gibt es damit auch $n_1 \in \mathbb{N}_+$ mit $n^{1/4} \geq \frac{4c}{\log 3}$ für jedes $n \geq n_1$. Folglich gilt für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$:

$$3^{\sqrt{n}} \geq n^{n^{1/4}(\log 3)/c} \geq n^4.$$

Mit E1 folgt also, dass f_1 und f_2 beide in $O\left(3^{\sqrt{n}}\right)$ sind.
Andererseits sei $c \in \mathbb{R}_+$ und $n_0 \in \mathbb{N}_+$. Zuerst sehen wir ein, dass für jedes $n \geq (\log c)^2 + 1$ gilt:

$$c \cdot 3^{\sqrt{n}} = 2^{\log c} \cdot 2^{\sqrt{n}\log_3 2} = 2^{\sqrt{n}\log_3 2 + \log c} < 2^{(1+\log_3 2)\sqrt{n}}.$$

Wegen E1 ist $n \notin O\left(\sqrt{n}\right)$, also gibt es $n \geq (\log c)^2 + 1$ mit $(1+\log_3 2)\sqrt{n} < n$. Damit folgt also $c \cdot 3^{\sqrt{n}} < 2^n$ und, da c und n_0 beliebig waren, $f_3 \notin O\left(3^{\sqrt{n}}\right)$.
d) Es ist $f_1(n) \notin n^3 + O\left(\frac{1}{\log(1+n)}\right)$, da für jedes $g \in O\left(\frac{1}{\log(1+n)}\right)$ gilt $g(n) \geq 0$ und damit für jedes $n \geq 2$: $f_1(n) = n^2 < n^3 \leq n^3 + g(n)$.
Für $n \geq 1$ gilt $\frac{1}{\log(1+n)} \leq 1 = n^0$. Wir wenden E1 an und erhalten $2n \notin O\left(\frac{1}{\log(1+n)}\right)$, das heißt, $f_2(n) \notin n^3 + O\left(\frac{1}{\log(1+n)}\right)$.
Analog ist $n^3 + O\left(\frac{1}{\log(1+n)}\right) \subseteq O\left(n^3\right)$ und nach E2 ist $f_3(n) \notin n^3 + O\left(\frac{1}{\log(1+n)}\right)$.

Aufgabe 11.4 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)
Eine *Graphfamilie* ist die Festlegung eines gerichteten Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_+$. In dieser Aufgabe geht es um Graphfamilien, die auf jeden Fall die folgende Eigenschaft haben:
(E0) Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist $|V_n| = n$ und $V_n \subseteq V_{n+1}$.
Außerdem seien folgende Eigenschaften definiert:
(E1) Es gibt einen Knoten $v \in V_n$ mit $d(v) \in \Theta(n)$.
(E2) Für jeden Knoten $v \in V_n$ gilt: $d(v) \in O(1)$.
a) Geben Sie eine Graphfamilie an, die nur aus Bäumen besteht und die Eigenschaften E0 und E1 hat. Begründen Sie anschließend, warum Ihre Lösung alle Bedingungen erfüllt.

b) Geben Sie eine Graphfamilie an, die nur aus Bäumen besteht und die Eigenschaften E0 und E2 hat. Begründen Sie anschließend, warum Ihre Lösung alle Bedingungen erfüllt.

c) Es sei eine Graphfamilie mit Graphen G_n gegeben, die Eigeschaft E0 hat. Zeigen Sie: Wenn G_n für jedes n streng zusammenhängend ist, dann ist salopp gesagt $|E_n| \in \Omega(n)$. Genauer: Für die Abbildung $f\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}_0^+ : n \mapsto |E_n|$ gilt: $f(n) \in \Omega(n)$.

Lösung 11.4

a) Z. B. $V_n = \mathbb{Z}_n$ und $E_n = \{(0, i) \mid i \in V_n \text{ und } i > 0\}$.
Dann gilt $d(0) = |V_n| - 1 = n - 1 \in \Theta(n)$. G_n ist ein Baum mit Wurzel $w = 0$, weil ausschließlich w ausgehende Kanten besitzt und w mit allen anderen Knoten durch eine einfache Kante verbunden ist.

b) Z. B. $V_n = \mathbb{Z}_n$ und $E_n = \{(i, i+1) \mid i \in V_n \text{ und } i < n - 1\}$.
Für $n \geq 2$ gilt dann $d(v) \in \{1, 2\}$, also $d(v) \in O(1)$. G_n ist ein Baum mit Wurzel $w = 0$, weil es für jedes $i \in V_n$ einen eindeutigen Pfad von w nach i gibt, repräsentiert durch den Teilgraph G_{i+1}.

c) Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq 2$ beliebig. Wenn G_n streng zusammenhängend ist, dann muss zu jedem Knoten v von einem anderen Knoten ein Pfad zu v hinführen, also muss insbesondere eine Kante zu v hinführen. Also hat jeder Knoten Eingangsgrad mindestens 1. Da $(u, v_1) \neq (u, v_2)$ für Kanten $(u, v_1), (u, v_2) \in E_n$ mit $v_1 \neq v_2$, so muss es also mindestens n Kanten in E_n geben, das heißt, $|E_n| \geq n$. Damit gilt insbesondere $|E_n| \in \Omega(n)$.