Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
6. März 2021

Nachname:							
Vorname:							
Matr.-Nr.:							

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Falls 2. Versuch, bitte `sehr gut lesbar` ausfüllen:

Email-Adr.:	
Postanschrift:	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	7	6	6	7	5	6	7
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 44		Note:	

/ 7 **Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 4 = 7 Punkte)**

/ 1

a) Es seien $f, g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ beliebige Funktionen.

Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $f \cdot g \in O(f)$ ist, dann ist $g \in O(1)$.

/ 1

b) $G = (V, E)$ sei der Graph mit $V = \mathbb{Z}_4$ und

$$E = \{(x, y) \in V \times V \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : x + y = 3k\}.$$

Geben Sie die Adjazenzmatrix A und Wegematrix W von G explizit an. Kennzeichen Sie deutlich, welche Matrix A ist und welche W.

/ 1

c) Gegeben sei die Grammatik $G = (N, T, X, P)$ mit $N = \{X, Y\}$, $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $P = \{X \to Y\mathtt{ab}, Y \to \varepsilon\}$.

Geben Sie Produktionen p_1 und p_2 an, sodass die Grammatik $G' = (N, T, X, P')$ mit $P' = P \cup \{p_1, p_2\}$ die Sprache $L(G') = \{\mathtt{a}\}^* \cdot \{\mathtt{ab}\}^+$ erzeugt.

/ 4

d) Wählen Sie sich zwei der folgenden Fragen aus und beantworten Sie sie:

1. Es sei $L_1 = \langle \mathtt{aa(b)*} \rangle$ und $L_2 = \langle \mathtt{(aa(bb)*)*} \rangle$. Gibt es einen regulären Ausdruck R, sodass die durch R beschriebene formale Sprache gleich $L_1 \cap L_2$ (also $\langle R \rangle = L_1 \cap L_2$) ist?

   Falls ja, geben Sie einen solchen regulären Ausdruck R an; andernfalls begründen Sie, warum das nicht der Fall sein kann.

2. Es sei $\mathtt{R}$ ein zweistelliges Relationssymbol und die prädikatenlogischen Formeln

   $$F = \forall x\, \exists y\, (\mathtt{R}(x, y) \to \mathtt{R}(y, x)) \quad \text{und} \quad G = \exists y\, \forall x\, (\mathtt{R}(x, y) \to \mathtt{R}(y, x))$$

   seien gegeben.

   Zeigen oder widerlegen Sie: F und G sind logisch äquivalent.

3. Es seien $f, g, h\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ beliebige Funktionen gegeben, für die $f \in O(g)$ und $g \in O(h)$ gilt.

   Zeigen oder widerlegen Sie: $h \in \Omega(f)$.

Ich beantworte Fragen $\boxed{}$ und $\boxed{}$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 1:

/ 6 **Aufgabe 2 (1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte)**

Es seien A und B Alphabete und $h\colon A^* \to B^*$ ein Homomorphismus.

/ 1

a) Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ und $B = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Es gibt nur endlich viele Homomorphismen $h\colon A^* \to B^*$, für die $h(\mathtt{abc}) = \mathtt{01}$ ist.

(i) Warum sind es nur endlich viele?

(ii) Wie viele genau gibt es? (Es reicht, eine Zahl anzugeben.)

Es seien A, B und h beliebig.

/ 1

b) Zeigen Sie: $h(\varepsilon) = \varepsilon$.

Für die beiden letzten Teilaufgaben beschränken wir uns auf Homomorphismen h, die *bijektiv* sind.

/ 2

c) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in A$ gilt: $|h(x)| = 1$.

Tipp. Weil h bijektiv ist, folgt aus Teilaufgabe b): $h(x) \neq \varepsilon$. Sie können damit davon ausgehen, dass es $y \in B$ und $w \in B^*$ mit $h(x) = yw$ gibt.

/ 2

d) Zeigen Sie, dass $|A| = |B|$ ist.

Hinweis. Sie dürfen hierzu die Aussage von Teilaufgabe c) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

| / 6 | **Aufgabe 3 (1 + 3 + 2 = 6 Punkte)**

| / 1 |

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein ungerichteter Graph G schlingenfrei und zusammenhängend ist, dann muss G ein Baum sein.

Geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

| / 3 |

b) Für $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$ sei der Homomorphismus $H\colon A^* \to \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ wie folgt festgelegt:

$$H(\mathtt{a}) = \mathtt{00} \qquad H(\mathtt{b}) = \mathtt{01} \qquad H(\mathtt{c}) = \mathtt{100}$$
$$H(\mathtt{d}) = \mathtt{101} \qquad H(\mathtt{e}) = \mathtt{110} \qquad H(\mathtt{f}) = \mathtt{111}$$

Zeichnen Sie einen Huffman-Baum zu einem Wort $w \in A^*$, der H als Codierung ergibt. Geben Sie w explizit an.

| / 2 |

c) Huffman-Bäume sind keine graphentheoretische sondern eine Art verallgemeinerter Bäume. Nennen Sie zwei weitere Arten von solchen verallgemeinerten Bäumen, die in der Vorlesung behandelt wurden.

Wählen Sie anschließend eine davon aus und beschreiben Sie, was dadurch dargestellt wird bzw. wofür diese Art Baum in der Informatik angewandt wird.

Art 1:

Art 2:

Ich beschreibe Art:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 7 **Aufgabe 4 (1 + 1 + 1 + 1 + 3 = 7 Punkte)**

/ 1 a) Geben Sie $\mathrm{Repr}_b(42)$ für $b = 2$ und $b = 3$ an.

/ 1 b) Geben Sie $\mathrm{Num}_b(\mathtt{10110})$ für $b = 2$ und $b = 3$ an.

Wir betrachten jetzt die folgende Sprache:

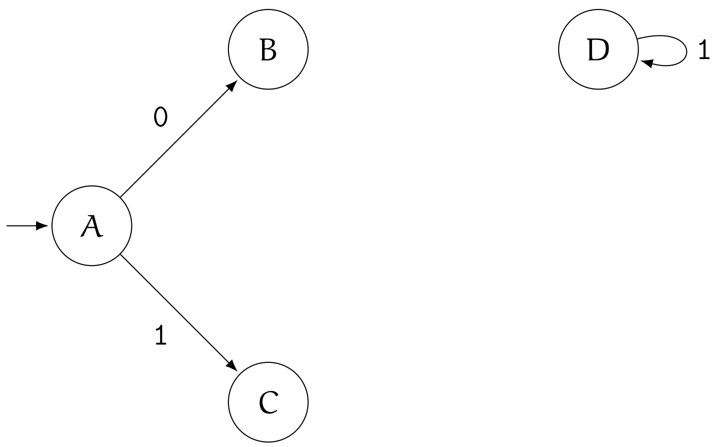
$$L = \{w \in \{0, 1\}^+ \mid \mathrm{Num}_2(w) \ \mathbf{mod}\ 2 = 0 \text{ oder } (\mathrm{Num}_2(w) \ \mathbf{div}\ 2) \ \mathbf{mod}\ 2 = 1\}.$$

/ 1 c) Geben Sie alle Wörter aus L an, die Länge 3 haben.

/ 1 d) Geben Sie eine Grammatik G mit höchstens 2 Nichtterminalsymbolen an, für die $L(G) = L$ ist. Auf der rechten Seite jeder Produktion darf dabei höchstens *ein* Nichtterminalsymbol vorkommen.

/ 3 e) Vervollständigen Sie den folgenden endlichen Akzeptor A, sodass $L(A) = L$ ist.

Sie dürfen dabei höchstens einen zusätzlichen Zustand verwenden. Die Zustände A, B, C und D dürfen Sie noch als akzeptierend kennzeichen.



Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

/ 5 **Aufgabe 5 (1 + 1 + 2 + 1 = 5 Punkte)**

/ 1

a) Wann heißt eine aussagenlogische Formel F unerfüllbar?

Es seien F, G und H aussagenlogische Formeln.

Ein Student, der sich noch nicht gut mit Aussagenlogik auskennt, hat die Formel $F \to (G \vee \neg H)$ in fünf Schritten U1, U2, U3, U4 und U5 umgeformt. Der Student ist so vorgegangen:

$$F \to (G \vee \neg H) \overset{U1}{\leadsto} \neg F \vee G \vee \neg H \overset{U2}{\leadsto} \neg G \to (F \wedge H) \overset{U3}{\leadsto} G \to \neg(F \wedge H)$$

$$G \to \neg(F \wedge H) \overset{U4}{\leadsto} G \to (F \to \neg H) \overset{U5}{\leadsto} (G \to F) \to \neg H$$

Leider hat der Student nicht auf die Semantik geachtet. Bei manchen Umformungen ist die entstehende Formel im Allgemeinen *nicht* logisch äquivalent zur vorangehenden.

/ 1

b) Bei welchen der fünf Umformungen ist die entstehende Formel im Allgemeinen *nicht* logisch äquivalent zur vorangehenden?

/ 2

c) Geben Sie für jeden der in Teilaufgabe b) genannten Fälle jeweils explizite Formeln F, G und H an, bei denen die neu entstehende Formel nicht logisch äquivalent zur vorangehenden ist. Gehen Sie dabei davon aus, dass das Alphabet aussagenlogischer Variablen $Var_{AL} = \{P, Q, R\}$ ist.

   Es genügt, jeweils die Formeln aufzuschreiben; Begründungen sind nicht erforderlich.

/ 1

d) Kann man immer noch Gegenbeispiele für die in Teilaufgabe c) genannten Fälle finden, wenn $Var_{AL} = \{P\}$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

/ 6

Aufgabe 6 (2 + 1 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ definieren wir einen endlichen Automaten A_n wie folgt:

- die Zustandsmenge ist $Q_n = \mathbb{Z}_n \cup \{-1\}$
- der Startzustand ist 0
- das Eingabealphabet ist $\mathbb{Z}_n$
- die Zustandsüberführungsfunktion $f \colon Q_n \times \mathbb{Z}_n \to Q_n$ ist für jedes $z \in Q_n$ und jedes $x \in \mathbb{Z}_n$ wie folgt festgelegt:

$$f(z,x) = \begin{cases} z+1, & z = x \text{ und } z < n-1 \\ z, & z = x \text{ und } z = n-1 \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

- die Menge akzeptierender Zustände ist $F_n = \{n-1\}$

/ 2

a) Zeichnen Sie A_1, A_2 und A_3.

/ 1

b) Geben Sie jedes $w \in L(A_4)$ an, für das gilt: $\forall w' \in L(A_4) : |w'| \geq |w|$.

/ 2

c) Nachfolgend sind vier formale Sprachen L_i mit $i \in \{1,2,3,4\}$ definiert:

(i) $L_1 = L(A_2) \cup L(A_3)$ (ii) $L_2 = L(A_2) \cap L(A_3)$

(iii) $L_3 = L(A_3) \setminus L(A_2)$ (iv) $L_4 = L(A_2) \setminus L(A_3)$

Geben Sie für jedes L_i einen formalen Mengenausdruck an, der genau L_i beschreibt. Verwenden Sie hierfür *ausschließlich* folgende Zeichen:

`0 1 2 { } ( ) , * · ∪ ε`

/ 1

d) Es sei $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{Z}_n$, $k \neq n-1$.

Angenommen, $B_n(k)$ ist derselbe Automat wie A_n, aber die Menge akzeptierender Zustände von $B_n(k)$ ist gleich $F'_n = \{k, n-1\}$.

Geben Sie $L(B_n(k)) \setminus L(A_n)$ und $L(A_n) \setminus L(B_n(k))$ präzise an.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

/ 7

Aufgabe 7 (1 + 1 + 1 + 3 + 1 = 7 Punkte)

Es sei T eine Turingmaschine mit Zustandsmenge Z, Anfangszustand $z_0 \in Z$, Bandalphabet X, Eingabealphabet $A \subseteq X \setminus \{\square\}$, Zustandsüberführungsfunktion $f\colon Z \times X \to Z$, Ausgabefunktion $g\colon Z \times X \to X$ und Bewegungsfunktion $m\colon Z \times X \to \{-1, 0, 1\}$.

/ 1

a) In der Vorlesung haben wir eine Konfiguration von T als ein Tripel $(z, b, p) \in Z \times X^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ definiert. Was wird durch z, b und p jeweils repräsentiert?

Wie in der Vorlesung bezeichnen wir als Abkürzung mit $\mathcal{C}_T = Z \times X^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ die Menge aller Konfigurationen von T.

/ 1

b) Es sei $c = (z, b, p) \in \mathcal{C}_T$ die aktuelle Konfiguration von T. Wann existiert eine Nachfolgekonfiguration $c' = (z', b', p') \in \mathcal{C}_T$?

/ 1

c) Wann sagt man, dass $c \in \mathcal{C}_T$ eine Endkonfiguration ist?

/ 3

d) Zeigen Sie folgende Aussage mittels vollständiger Induktion über n:

Es sei $c \in \mathcal{C}_T$ beliebig. Dann gibt es höchstens ein $c' \in \mathcal{C}_T$, sodass T von c ausgehend die Konfiguration c' in genau $n \in \mathbb{N}_0$ Schritten erreicht.

/ 1

e) Zeigen Sie die folgende Aussage:

Zu jedem Eingabewort $w \in A^*$ kann es höchstens eine Endkonfiguration geben, die T ausgehend von der Anfangskonfiguration für w erreicht.

Hinweis. Sie dürfen hierzu die Aussage von Teilaufgabe d) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: