

# Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 3

## Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:  Tutor\*in:

Matr.nr. 1:

Nach-,Vorname 1: ,

Matr.nr. 2:

Nach-,Vorname 2: ,

Ausgabe: 5. November 2020, 12:00 Uhr

Abgabe: 12. November 2020, 12:30 Uhr  
in dem Holzkasten neben Raum -119  
im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet **rechtzeitig** abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Online-Tutorien:

- handschriftlich erstellt (lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- direkt an den entsprechenden Tutor abgeben.

---

Von Tutor\*in auszufüllen: erreichte Punkte

Blatt 3:  / 20      Blätter 1 – 3, Stud. 1:  / 60

Blätter 1 – 3, Stud. 2:  / 60

**Aufgabe 3.1 (2 + 2 = 4 Punkte)**

Es seien  $P$ ,  $Q$  und  $R$  aussagenlogische Variablen. Betrachten Sie die folgende aussagenlogische Formel:

$$F = (P \rightarrow Q) \rightarrow (R \wedge (Q \rightarrow P))$$

- Geben sie alle Modelle von  $F$  an.
- Geben sie eine zu  $F$  äquivalente Formel an, die weder Implikationen noch Äquivalenzen enthält und in der ausschließlich einzelne Variablen (und keine aus mehreren Variablen zusammengesetzten Konnektive) negiert werden.

**Lösung 3.1**

- Folgende Interpretationen sind Modelle von  $F$ :

- $I(P) = \mathbf{w}, I(Q) = \mathbf{w}, I(R) = \mathbf{w}$
- $I(P) = \mathbf{w}, I(Q) = \mathbf{f}, I(R) = \mathbf{w}$
- $I(P) = \mathbf{f}, I(Q) = \mathbf{f}, I(R) = \mathbf{w}$
- $I(P) = \mathbf{w}, I(Q) = \mathbf{f}, I(R) = \mathbf{f}$

- $(P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge (P \vee \neg Q))$

**Aufgabe 3.2 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)**

Sei  $F$  eine nicht tautologische aussagenlogische Formel. Wir definieren die *Robustheit* eines Modells  $I$  von  $F$  als Abbildung  $R : I \rightarrow \mathbb{N}$ . Dabei sei  $R(I)$  die minimale Anzahl aussagenlogischer Variablen aus  $F$ , deren Belegung in  $I$  verändert werden muss, damit  $\text{val}_I(F) = \mathbf{f}$  gilt.

- Geben sie das Modell mit der größten Robustheit zur Formel aus Aufgabe 3.1 an.
- Geben sie eine nicht tautologische, aussagenlogische Formel  $G$  an.  $G$  soll genau 4 aussagenlogische Variablen, sowie ein Modell  $I$  mit  $R(I) = 4$  enthalten. Geben sie auch das Modell explizit an.
- Sei  $H$  eine aussagenlogische Formel mit 3 aussagenlogischen Variablen, für die ein Modell  $I$  mit  $R(I) = 2$  existiert. Wie viele Interpretationen  $I$  mit  $I(H) = \mathbf{f}$  kann  $H$  höchstens haben? Begründen Sie.

**Lösung 3.2**

- $I(P) = I(R) = \mathbf{w}, I(Q) = \mathbf{f}$

- Eine mögliche Lösung:  $G = P \vee Q \vee R \vee S$

Modell mit  $R(I) = 4$ :  $I(P) = I(Q) = I(R) = I(S) = \mathbf{w}$

- Eine aussagenlogische Formel mit 3 Variablen hat höchstens  $2^3 = 8$  mögliche Interpretationen. Damit für ein  $I$   $R(I) = 2$  gilt, muss sowohl  $I$ , als auch die 3 Interpretationen, bei denen je eine Variable anders belegt ist, erfüllende Interpretationen sein. Folglich gibt es mindestens 4 Modelle und maximal  $8 - 4 = 4$  unerfüllende Interpretationen.

**Aufgabe 3.3 (1 + 1 + 0 = 2 Punkte)**

Seien  $P, Q, R$  aussagenlogische Variablen. Beweisen Sie:

- $(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$

Geben sie hierzu eine Wahrheitstabelle mit folgenden Spalten an:

$P \quad Q \quad (P \wedge Q) \quad (\neg P \vee \neg Q) \quad \neg(\neg P \vee \neg Q)$

- $(P \vee Q) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ .

Führen sie diesen Beweis ohne Angabe einer Wahrheitstabelle.

- c) Die oben gezeigten Äquivalenzen sind auch als **De Morgan Gesetze** bekannt. Merken sie sich diese. Sie sind (sehr) wichtig.

### Lösung 3.3

	P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	
a)	f	f	f	w	f	Die Äquivalenz lässt sich in den Spalten $P \wedge Q$ und $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ ablesen.
	f	w	f	w	f	
	w	f	f	w	f	
	w	w	w	f	w	

- b) Es gilt:  $(P \vee Q) \equiv \neg(\neg(P \vee Q)) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ , wobei die 2. Äquivalenz aus a) folgt.

### Aufgabe 3.4 (0 + 3 + 0 = 3 Punkte)

Mittlerweile haben sie die folgenden die Distributivgesetze kennen gelernt.  
 der Aussagenlogik: für Mengen:

- $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
- $(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

- a) Betrachten sie die obigen Gesetze bis ihnen ein Zusammenhang auffällt.  
 b) In Aufgabe 1.2 und 1.3 haben sie (sehr lange) Beweise für die Distributivgesetze für Mengen gesehen, bzw. geführt. Leiten sie in dieser Aufgabe die Distributivgesetze für Mengen aus den Distributivgesetzen der Aussagenlogik her. Sie werden feststellen, dass dieser Beweis deutlich kürzer als der auf Übungsblatt 1 ist.  
 c) Merken sie sich diese Gesetze. Sie sind (sehr) wichtig.

### Lösung 3.4

- b) Da  $x \in M$ , bzw.  $x \notin M$  zwei erschöpfende, disjunkte Kategorien sind, lässt sich  $x \in M$  für beliebige  $x$  und beliebige Mengen  $M$  als aussagenlogische Variable modellieren. Wir definieren die Schreibweise  $A \hat{=} F$  für:  
 Sachverhalt  $A$  wird durch aussagenlogische Formel  $F$  „modelliert“,  
 was effektiv bedeutet:  $A$  gilt, genau dann wenn  $val_I(f) = \mathbf{w}$ .  
 Seien im Folgenden  $P, Q, S$  Variablen mit:  $x \in A \hat{=} P$ ,  $x \in B \hat{=} Q$ , bzw.  $x \in C \hat{=} S$ .  
 Dann gilt:  $P \wedge Q \hat{=} (x \in A) \wedge (x \in B) \hat{=} x \in A \cap B$ ,  
 sowie:  $P \vee Q \hat{=} (x \in A) \vee (x \in B) \hat{=} x \in A \cup B$ .  
 Somit folgt die jeweilige Variante des Distributivgesetzes für Mengen direkt aus der jeweiligen Variante des Distributivgesetzes der Aussagenlogik.

### Aufgabe 3.5 (2,5 + 2,5 + 1 + 1 = 7 Punkte)

Dr. Meta hat (vor einiger Zeit) die Aussagenlogik für sich entdeckt. Dieses zweifelsohne sehr mächtige Werkzeug versucht er zur Ergreifung der Weltherrschaft zu nutzen. Hierzu hat er sich gleich zwei (genial böse) Pläne überlegt. Daran arbeiten zur Zeit mehrere Abteilungen seiner weitreichenden, kriminellen Organisation. Dr. Meta hat einkalkuliert, dass unter Umständen nicht alle Abteilungen mit ihren Teilvorhaben erfolgreich sind.

- a) Für ein Gelingen von Plan "Just do it" sind lediglich diese Punkte notwendig:
- Abteilung P ist erfolglos oder aber Abteilung Q erfolgreich.
  - Wenn Abteilung R erfolgreich ist, darf nicht passieren, dass der Erfolg von Abteilung Q zum Erfolg von Abteilung P führt.
  - Der Erfolg von Abteilung Q muss den Erfolg von Abteilung P nach sich ziehen

und darf auf keinen Fall zum Scheitern von Abteilung R führen.

- Abteilung Q muss unbedingt erfolgreich sein.

Modellieren sie den Erfolg des Unterfangens als aussagenlogische Formel. Wie schätzen sie die Erfolgsaussichten ein? Vereinfachen sie die aufgestellte Formel, sodass sie ihre Meinung verständlich begründen können.

- b) Plan "While (not yet successful): keep trying" gelingt, sofern nicht gilt, dass:
- Der Erfolg von Abteilung P dazu führt, dass der Erfolg von Abteilung Q zum Erfolg von Abteilung R führt
  - der oben genannte Punkt dazu führt, dass wenn Abteilung P erfolglos oder Abteilung Q erfolgreich ist, dies dazu führt, dass der Erfolg von Abteilung P den Erfolg von Abteilung R *bedingt*. [Gängige Interpretation von „bedingen“]
- Evaluieren sie die Erfolgsaussichten dieses Plans analog zu a). Begründen Sie. Formen sie die Formel ggf. um, sodass ihre Begründung nachvollziehbar ist.
- c) Ein aufstrebender Assistent von Dr. Meta möchte einen sehr komplexen Sachverhalt A beweisen. Hierzu nimmt er an, dass dieser gilt und folgert daraus, dass er gelten muss. Erklären sie Dr. Meta ob dieser Beweis korrekt ist und warum.
- d) Ein zweiter Assistent schaltet sich ein. Er plädiert, dass Sachverhalt A gar nicht gilt und meint dies bewiesen zu haben, indem er aus A die Sachverhalte B, C und D gefolgert hat, von denen allerdings nur zwei gleichzeitig gelten können. Hat der Beweis dieses Assistenten Hand und Fuß? Begründen sie.

### Lösung 3.5

- a) Aussagenlogische Formel:  $(\neg P \vee Q) \wedge (R \rightarrow \neg(Q \rightarrow P)) \wedge (Q \rightarrow (P \wedge R)) \wedge Q$   
Diese Formel lässt sich z.B. vereinfachen zu:  $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \neg P) \wedge Q$   
Hier kann man sehen, dass weil  $I(Q) = \mathbf{w} = I(P) = I(R)$  gelten muss. Allerdings lässt sich somit  $Q \rightarrow \neg P$  nicht mehr erfüllen. Die Formel ist also unerfüllbar und der Plan muss scheitern.
- b) Aussagenlogische Formel:  $\neg((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$   
Lässt sich z.B. umformen zu:  $\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q \vee R) \vee \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg P \vee R)$ . Hier kann man nun argumentieren, dass damit die Formel innerhalb der äußersten Klammern **nicht** erfüllt ist,  $I(R) = \mathbf{f}$  und  $I(P) = \mathbf{w}$  gelten muss. Damit lässt sich die Formel dann weiter vereinfachen zu:  $\neg(\neg(\neg Q) \vee \neg Q) \equiv \neg(Q \vee \neg Q) \equiv \neg \mathbf{w} \equiv \mathbf{f}$ . Folglich ist auch diese Formel unerfüllbar und der Plan kann nicht klappen.
- c) Hier wird effektiv argumentiert: A gilt ja, weil wenn A gilt, dann gilt ja A. „Wenn A gilt, gilt A“ ist aber eine Tautologie:  $(P \rightarrow P)$ . Folglich ist die Folgerung  $(P \rightarrow P) \rightarrow X$  mit beliebigem Sachverhalt X von der Gültigkeit von X abhängig und niemals ein korrekter Beweis für X (hier:  $X \hat{=}$  „Sachverhalt A gilt“).
- d) Hier ist das sogenannte Prinzip des "indirekten Beweises" illustriert. Dies ist ein korrektes Beweisschema, bei dem  $P \rightarrow \mathbf{f}$  gezeigt wird. Diese Implikation ist genau dann erfüllbar, wenn  $I(P) = \mathbf{f}$ . Folglich kann der Sachverhalt A so korrekt widerlegt werden.