Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 5

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:		
Nach-,Vorname 1:		,
Matr.nr. 2:		
Nach-,Vorname 2:		,

Ausgabe: 19. November 2021, 12:00 Uhr

Abgabe: 26. November 2021, 12:30 Uhr
in dem Holzkasten neben Raum -119
im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Online-Tutorien:

- handschriftlich erstellt (lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- direkt an den entsprechenden Tutor abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 5:	/ 19,5	Blätter 1 – 5, Stud. 1:	/ 99,5
		Blätter 1 – 5, Stud. 2:	/ 99,5

Hinweis: Auf diesem Blatt beträgt die Maximalpunktzahl 22P. Diese wird auf späteren Blättern ausgeglichen, sodass Sie im Schnitt mit max. 20P pro Blatt rechnen können.

Aufgabe 5.1 (2 Punkte)
Sei A ein Alphabet und $h : A^* \to A^*$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass für alle $w \in A^+$ gilt: $h(w) = h(w(0)) \cdot h(w(1)) \cdot ... \cdot h(w(|w| - 1))$

Aufgabe 5.2 (1 [+ 2,5] + 1,5 = 2,5 [+ 2,5] Punkte)
Seien A, B beliebige Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. In dieser Aufgabe gelten zwei Funktionen g, g' als *verschieden*, wenn mindestens ein x mit $g(x) \neq g'(x)$ existiert.

a) Sei $|A| = 5$ und $|B| = 2$. Wie viele *verschiedene* Rechtsinverse kann f maximal besitzen? Begründen Sie.
b) Sei $B \neq \emptyset$ und f surjektiv. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an $|A|$ an, sodass f mehrere *verschiedene* Rechtsinverse besitzen kann. Beweisen Sie die Notwendigkeit der Bedingung. *Diese Aufgabe gibt 2,5 Bonuspunkte.*
c) Geben Sie zwei Mengen A, B, sowie eine Abbildung $f : A \to B$, die mindestens 2 *verschiedene* Linksinverse $l_1, l_2 : B \to A$ besitzt, explizit an. Geben Sie auch beide Linksinverse explizit an.

Aufgabe 5.3 (2 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)
Seien A, B beliebige Alphabete. Im Folgenden erweitern wir den Begriff der ε-Freiheit auf beliebige Funktionen $f : A^* \to B^*$ wie folgt:
f ist ε-frei, wenn gilt: $f(w) \neq \varepsilon$, für alle $w \in A^+$

a) Zeigen Sie, dass diese Definition von ε-Freiheit für Homomorphismen $h : A^* \to A^*$ mit der Definition von ε-Freiheit aus der Vorlesung äquivalent ist.
Tipp: Das heißt, dass h entweder beide oder keine der beiden Definitionen erfüllt.

Sei im Folgenden $f : A^* \to A^*$ eine beliebige Funktion mit den in der jeweiligen Teilaufgabe spezifizierten Eigenschaften. Ist f (im Allgemeinen) ein Homomorphismus? Ist f ε-frei im Sinne der Aufgabe? Beantworten und beweisen Sie jeweils beide Fragen.

b) $f(w) = \varepsilon$, für alle $w \in A^*$
c) $f(x) = x$, mit $x \in A$ und $|f(w)| = |w|$, für alle $w \in A^*$
d) für alle Teilworte lmr von w gilt: $f(lmr) = f(l) \cdot f(m) \cdot f(r)$ für alle $l, m, r \in A \cup \{\varepsilon\}$, und alle $w \in A^*$

Aufgabe 5.4 (1,5 + 3 = 4,5 Punkte)
Sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Gegeben seien folgende Funktionsdefinitionen:

$$boss(w) = worker(w, \varepsilon)$$
$$worker(\varepsilon, w') = w' \tag{1}$$
$$worker(\mathtt{a}w, \varepsilon) = \mathtt{a} \cdot worker(w, \mathtt{b}) \tag{2}$$
$$worker(\mathtt{a}w, \mathtt{a}^i) = \mathtt{a} \cdot worker(w, \mathtt{a}^{i-1}) \tag{3}$$
$$worker(\mathtt{a}w, \mathtt{b}^i) = \mathtt{a} \cdot worker(w, \mathtt{b}^{i+1}) \tag{4}$$
$$worker(\mathtt{b}w, \varepsilon) = \mathtt{b} \cdot worker(w, \mathtt{a}) \tag{5}$$
$$worker(\mathtt{b}w, \mathtt{a}^i) = \mathtt{b} \cdot worker(w, \mathtt{a}^{i+1}) \tag{6}$$
$$worker(\mathtt{b}w, \mathtt{b}^i) = \mathtt{b} \cdot worker(w, \mathtt{b}^{i-1}) \tag{7}$$

je für alle $w, w' \in A^*, i \in \mathbb{N}_+$

a) Was berechnet $boss(w)$, für $w \in A^*$? Geben Sie eine genaue formale Definition der Ausgabe an.

b) Beschreiben Sie die Vorgehensweise der Funktionen möglichst präzise (= kurz, aber verständlich). Beantworten Sie dabei folgende Fragen:
   - Welche Funktion hat der 2. Parameter von *worker*?
   - Was „passiert" in Zeile (2) und (5)?
   - Was „passiert" in Zeile (3) und (7)?
   - Was „passiert" in Zeile (4) und (6)?
   - Wozu dient Zeile (1)?

Aufgabe 5.5 (0,5 + 1 + 2 = 3,5 Punkte)

Dr. Meta ist außer sich! Durch seine Drohnen hat er erfahren, dass es in letzter Zeit immer häufiger zu Verwechslungen mit einem gewissen Markus Zuckertal gekommen ist, der seine Firma nach ihm benannt hat, kam. Im Vergleich seiner genial bösen Person, die natürlich an einer nicht wirklich sehr bekannten, aber bekanntermaßen wirklich sehr elitären Institution promoviert hat, ist Markus ein Uniabbrecher und sein Firmchen keine globale, die gesamte Menschheit (z.B: mit B.I.R.D-Drohnen) ausspähende Megakorporation, sondern ein paar (während der Klausurenphase unbedingt!) vernachlässigbare soziale Netzwerkle und Messengerli. In eben Letzteren wird der wahrlich einzigartige Dr. Meta seine Wut entladen, indem er eine Sammlung genial böser Vielleicht-Homomorphismen auf Wörter aller Art loslässt. Als sein*e neue*r Lieblingsassistent*in dürfen Sie diese für ihn definieren.

Definieren Sie (ggf. induktiv) Abbildungen, die Dr. Metas Anforderungen erfüllen:

a) $reverse : A^* \to A^*$ soll die Reihenfolge der Zeichen jedes Eingabewortes $w \in A^*$ umkehren. Bsp: $reverse(\mathtt{atem}) = \mathtt{meta}$

b) $eliminate_M : A^* \to A^*$ soll alle Vorkommen der Zeichen $x \in M$ (stets: $\varepsilon \notin M$) aus jedem Eingabewort w entfernen. Bsp: $eliminate_{\{\mathtt{o},\mathtt{u},\mathtt{l},\mathtt{n}\}}(\mathtt{monumental}) = \mathtt{mmeta}$

c) Sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. $equalize : A^* \to A^*$ soll jedes $w \in A^*$ auf ein w', mit $N_a(w') = N_b(w')$ abbilden und ein injektiver, ε-freier Homomorphismus sein. Verwenden Sie für die Definition der Funktion allerdings **nicht** N_x oder analog funktionierende Funktionen mit anderem Namen!

Sie müssen die jeweils geforderten Eigenschaften **nicht** beweisen, sondern nur erfüllen!