Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 10
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: 14. Januar 2021, 12:00 Uhr

Abgabe: 21. Januar 2021, 12:30 Uhr
in dem Holzkasten neben Raum -119
im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie
- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Online-Tutorien:
- handschriftlich erstellt (lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- direkt an den entsprechenden Tutor abgeben.

---

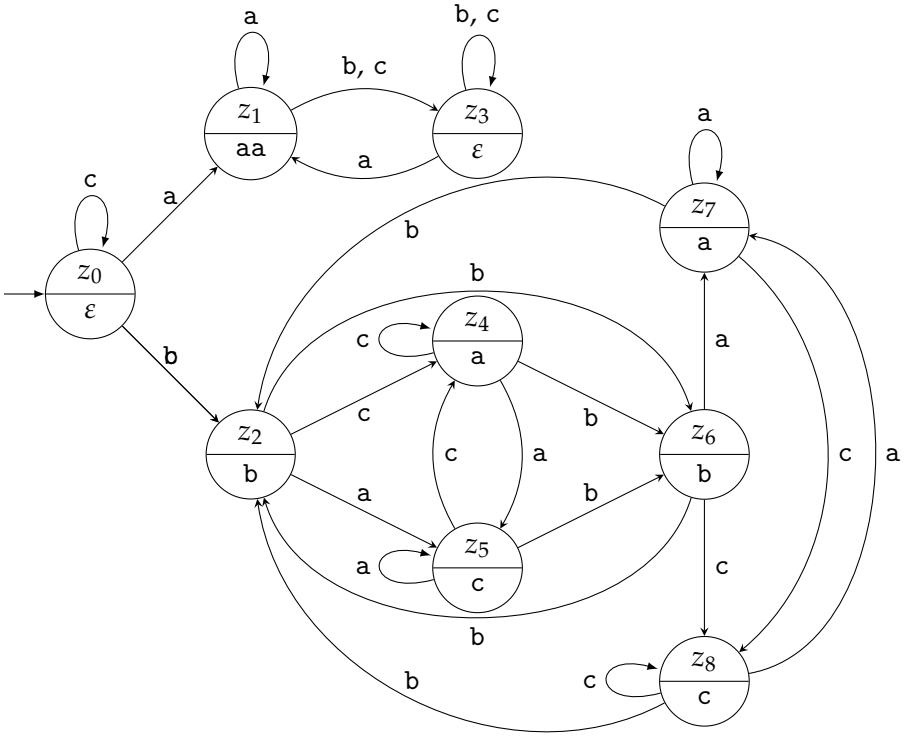
*Von Tutor*in auszufüllen:*

erreichte Punkte

Blatt 10:	/ 21
Blätter 7 – 10:	/ 86 [+3]

Aufgabe 10.1 (0,5 + 1 + 2 = 3,5 Punkte)

Gegeben Sei folgender Moore-Automate A_{fancy}:



a) Geben Sie $g_{**}(z_0, \texttt{abcabc})$ an.

b) Geben Sie $g_{**}(z_0, \texttt{babacaba})$ an.

c) Beschreiben Sie was A bei folgenden Eingabeworten w ausgibt. Beschreiben sie hierzu, wie A w verändert. Achten Sie auf eine verständliche Beschreibung.
Anmerkung: Verwenden Sie gerne natürliche Sprache.
- $w = \texttt{a}w'$, $w' \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^*$
- $w = \texttt{b}w'$, $w' \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^*$
- $w = \texttt{c}w'$, $w' \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^*$

Lösung 10.1

a) $g_{**}(z_0, \texttt{abcabc}) = \texttt{aaaa}$

b) $g_{**}(z_0, \texttt{babacaba}) = \texttt{bcbacabc}$

c) A verändert ein Eingabewort w wie folgt:
- $w = \texttt{a}w'$, $w' \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^*$:
  A verdoppelt alle „a“s und entfernt alle „b“s und „c“s aus w.
- $w = \texttt{b}w'$, $w' \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^*$
  A bearbeitet w *phasenweise*. In der ersten Phase wird in jedes „a“ des Teilworts durch ein „c“ ersetzt und umgekehrt. Bearbeiten eines „b“ versursacht einen Wechsel zu Phase zwei, das „b“ wird dabei nicht verändert. In der zweiten Phase bleibt das Teilwort unverändert. Bearbeiten eines „b“s verursacht einen Phasenwechsel zurück zu Phase eins, ohne dass das „b“ dabei verändert wird.
- $w = \texttt{c}w'$, $w' \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^*$
  A löscht führende „c“s und arbeitet danach abhängig davon ob das erste nicht-„c“ in w ein „a“ oder „b“ ist wie für Worte mit diesem Anfangszeichen.

Aufgabe 10.2 (1 + 4 + 1 = 6 Punkte)
Die teuflisch tückische *Mathemagierin* Theresa Trivial kann Automaten nicht leiden. Sie bevorzugt eindeutig rechtslineare Grammatiken. Heute prüft sie stellvertretend eine mündliche Nachprüfung im beliebten Modul „Gutes Beweisen in der Informatik“ und verlangt vom Prüfling zu beweisen, dass endliche Akzeptoren rechtslinearen Grammatiken *gleichwertig* sind.
Der Prüfling rezitiert selbstsicher folgenden Beweis:
Sei $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$ eine beliebige rechtslineare Grammatik. Es lässt sich ganz leicht ein endlicher Akzeptor $A = (Z, \mathtt{S}, T, f, F)$ definieren, sodass $L(G) = L(A)$ gilt:

- $Z := N \cup \{z_{ja},\ z_{nein}\}$
- Eingabealphabet T
- Startzustand $\mathtt{S}$
- $F := \{z_{ja}\}$
- $\forall z_i \in Z, x \in T$: $f(z_i, x) = \begin{cases} z_k & \text{,falls gilt: } \exists p = (z_i \to xz_k) \in P \\ z_{ja} & \text{,falls gilt: } \exists p = (z_i \to x) \in P \\ z_{nein} & \text{,falls keiner der oberen beiden Fälle gilt} \end{cases}$

a) Führen Sie die Konstruktion für die folgende Grammatik G durch und geben Sie den erzeugten endlichen Akzeptor A grafisch an. Gilt $L(G) = L(A)$?
$G = (\{\mathtt{S}, \mathtt{A}\},\ \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\},\ \mathtt{S},\ \{\mathtt{S} \to \mathtt{aA}|\mathtt{c},\ \mathtt{A} \to \mathtt{bS}|\mathtt{c}\})$

Theresa runzelt ungläubig die Stirn. „Was ist, wenn G eine Produktion enthält, bei der mehrere Terminalsymbole erzeugt werden? Wie z.b. $(\mathtt{S} \to \mathtt{ababA})$?“
Der Prüfling bekommt Panik...

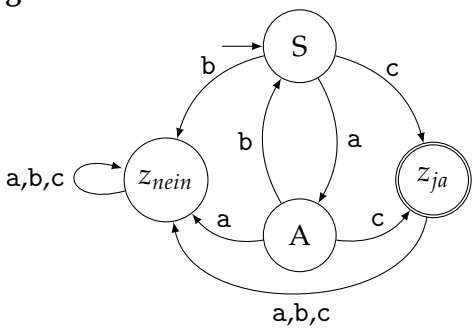
b) Wie kann die oben vorgestellte Konstruktion erweitert werden, sodass Produktionen, bei denen mehrere Terminalsymbole erzeugt werden, in A ebenfalls korrekt abgebildet werden? Beschreiben Sie die Ergänzung formal korrekt und zeichnen Sie als Beispiel das Resultat (ausschließlich) für die Produktion $(\mathtt{S} \to \mathtt{ababA})$. Gehen Sie dabei von $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ aus.

Nachdem der Prüfling mühsam seine Konstruktion ergänzt hat, fragt er zaghaft:
„Und, h... habe ich bestanden?“

c) Die Konstruktion des Prüflings ist leider auch nach der Ergänzung von Teilaufgabe b) nicht vollständig, bzw. korrekt. Geben Sie zwei weitere Unvollständigkeiten, bzw. Fehler an.

„Exmatricullus!“
Mit einem lässigen Schwung ihres Handgelenks zaubert Theresa den Prüfling (auf ewig) vom Campus, ehe seine erste Träne den Boden berührt.
*Anmerkung: Am KIT gibt es zwar (offiziell) keine teuflisch tückischen Prüfer*innen, dennoch sollten Sie mündliche Nachprüfungen möglichst vermeiden.*

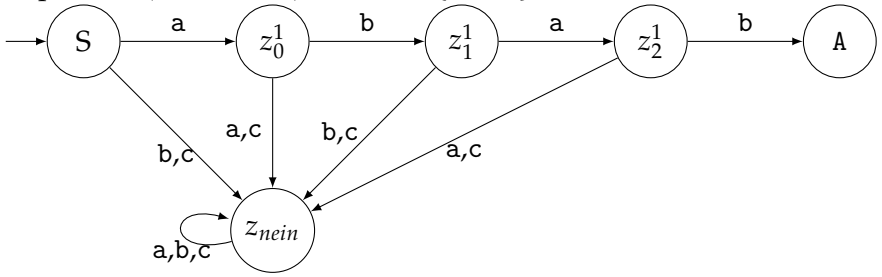
Lösung 10.2



a) Ja, für diesen Automat gilt $L(G) = L(A)$.

b) Erklärung: *(nicht gefordert)*
Für Produktionen in $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$, die mehrere Terminalsymbole auf einmal erzeugen, müssen mehrere Übergänge in $A = (Z, \mathtt{S}, T, f, F)$ definiert werden, bei denen jeweils eines dieser Terminalsymbole gelesen wird. Hierzu müssen weitere Zwischenzustände definiert werden. Ein Problem bei der *formal korrekten* Beschreibung ist, allen Zwischenzuständen einen eindeutigen Namen zu geben, wozu im folgenden eine doppelte Indizierung (z^i_k) verwendet wird.
Anmerkung: zum Verständnis zunächst einmal das Beispiel betrachten
formaler Beweis: *(gefordert)*
Sei $P_{mult} \subseteq P$ die Teilmenge von P, welche alle Produktionen $p_i = (N_1 \to wN_2)$ enthält, wobei $N_1, N_2 \in N$, $w \in T^*$, mit $|w| \geq 2$. Die $p_i \in P_{mult}$ seien mit einem eindeutigen Index i, mit $0 < i \leq |P_{mult}|$ *abgezählt*. Für ein beliebiges $p_i = (N_1 \to wN_2) \in P_{mult}$, unterteilen wir w in seine einzelnen Zeichen: $w = w(0) \cdot ... \cdot w(|w|-1)$ und definieren $|w| - 2$ viele neue Zustände für A, welche wir z^i_0 ... $z^i_{|w|-2}$ nennen (i ist der Index von p_i). Nun fügen wir in A folgende Zustandsübergänge für jede Produktion p_i ein: $f(N_1, w(0)) = z^i_0$ und $f(z^i_k, w(k+1)) = z^i_{k+1}$, $\forall\ 0 < k < |w| - 2$, sowie schlussendlich $f(z^i_{|w|-2}, w(|w|-1)) = N_2$. Ebenso (zur Vollständigkeit) folgende Übergänge: $f(z^i_k, x) = z_{nein}$, $\forall x \neq w(k+1) \in T$. Es können in P natürlich auf Produktionen der Form $p_l = (N_1 \to w)$, mit $w \in T^*$, also mehrere Terminalsymbole **ohne** Nichtterminalsymbol ganz rechts vorkommen. Für diese definieren wir analog $|w| - 2$ neue Zustände z^l_0 ... $z^l_{|w|-2}$ und analog die Übergänge: $f(N_1, w(0)) = z^l_0$ und $f(z^l_k, w(k+1)) = z^l_{k+1}$, $\forall\ 0 < k < |w| - 2$, **aber** schlussendlich $f(z^i_{|w|-2}, w(|w|-1)) = \mathbf{z_{ja}}$. Wir definieren wieder (zur Vollständigkeit) $f(z^l_k, x) = z_{nein}$, $\forall x \neq w(k+1) \in T$.

Beispiel für $(\mathtt{S} \to \mathtt{ababA})$, mit $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$:



c) Die Konstruktion kann weiterhin nicht alle rechtslinearen Grammatiken G auf Akzeptoren A abbilden. Folgende Produktionen werden nicht / falsch behandelt:
- $N_1 \to xN_2 | xN_3$ führt zu *uneindeutigen* Übergängen
- $N_1 \to \varepsilon$ keine (einfache) Abbildung auf Akzeptor möglich

mit $N_1, N_2 \in N$, $x \in T$

Aufgabe 10.3 (2 + 1 + 0,5 + 1,5 = 5 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass es für jeden endlichen Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$ eine rechtslineare Grammatik $G = (N, T, \mathtt{S}, P)$, mit $L(A) = L(G)$ gibt.

a) Geben Sie hierzu eine Konstruktionsvorschrift an, wie sie G abhängig von A erzeugen können, **ohne** dabei *die Allgemeinheit von A einzuschränken*, das heißt Ihre Konstruktion muss für beliebige A funktionieren.
b) Beweisen Sie, dass für durch Ihre Konstruktion (aus beliebigen A) erzeugte G gilt: $\forall w \in X^* : w \in L(A) \Rightarrow w \in L(G)$
Anmerkung: Ihre Konstruktion sollte diese Eigenschaft haben!
c) Was müssen Sie zusätzlich zum Beweis in Teilaufgabe b) noch zeigen, um die Korrektheit Ihrer Konstruktion vollständig zu beweisen?
d) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion vollständig.

Lösung 10.3

a) Zu $A = (Z, z_0, X, f, F)$ definiere $G = (N, T, z_0, P)$ wie folgt:
   - $N := Z$
   - $T := X$
   - Startsymbol z_0
   - $P := \{z_i \to xz_j \mid f(z_i, x) = z_j\} \cup \{z_i \to \varepsilon \mid z_i \in F\}$

   Anmerkung: Diese Konstruktion funktioniert für beliebige A, da sie keine konkreten Annahmen über die Struktur von A macht.
b) Aus $w \in L(A)$ folgt: $f_*(z_0, w) \in F$. Folglich gibt es nach Konstruktion eine Folge von Produktionen, sodass $z_0 \Rightarrow^* wz_i$, mit $z_i \in F$. Somit existiert auch die Produktion $z_i \to \varepsilon$ und damit gilt: $z_0 \Rightarrow^* wz_i \Rightarrow w$.
c) Es gilt noch zu zeigen, dass $\forall w \in X^* : w \in L(G) \Rightarrow w \in L(A)$
d) Zu zeigen $\forall w \in X^* : w \in L(G) \Rightarrow w \in L(A)$:
   Es gilt $w \in L(G)$, d.h. es existiert eine Folge von Ableitungen mit $z_0 \Rightarrow w$. Nach Konstruktion muss daher $z_0 \Rightarrow^* wz_i$, mit $z_i \in F$ gelten, da nur $z_i \in F$ auf ε ableitbar und somit Nichtterminale aus dem erzeugten Wort „entfernbar“ sind. Da eine Produktion $z_l \Rightarrow^* az_k$, mit $z_l, z_k \in N$, $a \in T$ nach Konstruktion nur dann existiert, wenn in A $f(z_l, a) = z_k$ ist, impliziert $z_0 \Rightarrow^* wz_i$, dass $f_*(z_0, w) = z_i$ gilt. Aus $z_i \in F$ folgt $w \in L(A)$.

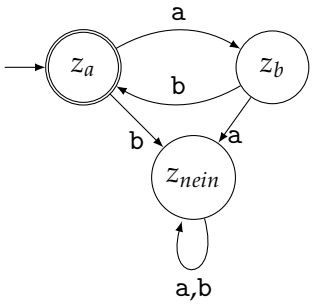
Wichtige Anmerkung: Diese Aufgabe wirkt in Kombination mit der falschen Konstruktion von rechtslin. Grammatik $\to$ endl. Akzeptor in der vorherigen Aufgabe vielleicht so, als seien rechtslineare Grammatiken in irgend einer Art und Weise *mächtiger* als endliche Akzeptoren. Dies ist ausdrücklich **nicht** der Fall! Die etwas kompliziertere, aber korrekte Konstruktion, um zu jeder rechtslinearen Grammatik einen endlichen Akzeptor aufzustellen wird Ihnen im 3. Semester in TGI begegnen.

Aufgabe 10.4 (1,5 + 1 = 2,5 Punkte)
Für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$, sei $L_n := \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\}$.

a) Geben Sie ein Schema an, um einen endlichen Akzeptor A_n^{akz}, mit $L(A_n^{akz}) = L_n$ für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ zu konstruieren.
b) Ist es möglich, einen endlichen Akzeptor A_{ab^n}, mit $L(A_{ab^n}) = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ zu konstruieren?
   - Falls ja: Zeichnen sie A_{ab^n}.
   - Falls nein: Begründen Sie, wieso dies nicht geht.

Lösung 10.4

a) $A_n^{akz} = (Z_n, z_0, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, f_n, F_n)$, mit:
- $Z_n = \{z_i \in \mathbb{N}_0 \mid i \leq 2n\} \cup \{z_m\}$
- $f_n(z_i, \mathtt{a}) = \begin{cases} z_{i+1} & \text{, falls } i < n \\ z_m & \text{sonst} \end{cases}$
- $f_n(z_i, \mathtt{b}) = \begin{cases} z_{i+1} & \text{, falls } i \geq n \\ z_m & \text{sonst} \end{cases}$
- $F_n = \{z_{2n}\}$



b) Ja:

Aufgabe 10.5 (2,5 + 1,5 = 4 Punkte)

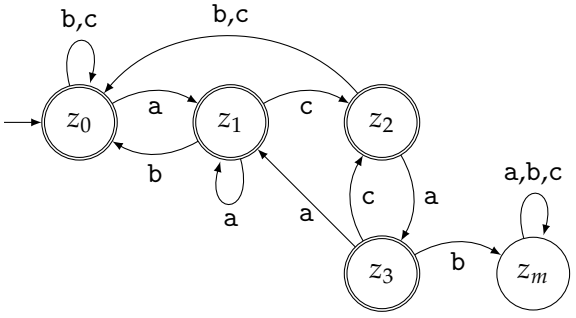
Sei $L_{anti} = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid w$ enthält das Teilwort „$\mathtt{acab}$“$\}$
Sei ferner $L_{anti}^c = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid w \notin L_{anti}\}$

a) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der entweder genau L_{anti} oder genau L_{anti}^c erzeugt. Geben Sie für die andere Sprache einen endlichen Akzeptor an, der genau die Sprache akzeptiert.
Anmerkung: Es wird höchstens je ein Akzeptor, bzw. regulärer Ausdruck gewertet!

b) Sei X ein beliebiges Alphabet. Zu einem $w \in X^*$ sei
$L_w = \{u \in X^* \mid$ u enthält das Teilwort $w\}$.
Ist L_w stets eine reguläre Sprache? Beweisen Sie.

Lösung 10.5

a) regulärer Ausdruck für L_{anti}: $(\mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid \mathtt{c}) * (\mathtt{acab}) (\mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid \mathtt{c})*$



endlicher Akzeptor für L_{anti}^c:
Anmerkung: Um einen endlichen Akzeptor für L_{anti} zu erhalten muss nur die Akzeptanz der Zustände vertauscht werden, d.h. nur z_m wird akzeptiert.
Ein regulärer Ausdruck für L_{anti}^c ist recht komplex.

b) Ja, L_w ist stets regulär.
Es lässt sich stets ein regulärer Ausdruck angeben, der genau L_w erzeugt:
$(R*) \cdot w \cdot (R*)$, wobei R der reguläre Ausdruck ist, der genau ein beliebiges Zeichen aus X erzeugt, also $R = (x_1 \mid x_2 \mid ... \mid x_n)$, mit $x_i \in X$.