Karlsruher Institut für Technologie

Nachklausur Grundbegriffe der Informatik
SS 2022

01. August 2022

Name:	
Matrikelnummer:	

Beachten Sie:

- Schreiben Sie Ihren vollständigen **Namen** und **Matrikelnummer** in Druckschrift in das Feld auf dem Deckblatt!
- Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer oben auf jedes bearbeitete Aufgabenblatt.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter. Bei Bedarf können Sie weiteres Papier anfordern.
- Wir akzeptieren auch englische Antworten.
- Sie haben **120 Minuten** Bearbeitungszeit.
- Die Klausur umfasst 19 Seiten (11 Blätter) mit 7 Aufgaben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	**Gesamt**
Erreichte Punkte								
Erreichbare Punkte	11	8	9	7	10	7	8	**60**

Note

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen (11 Punkte)

a) Begründen oder widerlegen Sie: für Mengen A, B und C gilt: **(1 Punkt)**

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)\ .$$

Musterlösung

Wir zeigen die Gleichheit durch zwei Implikationen:

"$\Rightarrow$" : Sei $x \in A \setminus (B \cap C)$. Dann ist $x \in A$ und $x \notin (B \cap C)$, also $x \notin B$ oder $x \notin C$. Somit ist $x \in (A \setminus B)$ oder $x \in (A \setminus C)$, also auch $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

"$\Leftarrow$" : Sei $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Dann ist $x \in (A \setminus B)$ oder $x \in (A \setminus C)$. Also $x \in A$, und $x \notin B$ oder $x \notin C$. Daher auch $x \in A \setminus (B \cap C)$.

b) i) Wie viele Modelle $\{P, Q, R\} \to \mathbb{B}$ besitzt die folgende aussagenlogische Formel?

$$F = (P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge R$$

Umkreisen Sie den entsprechenden Wert k in der ersten Spalte der Tabelle. Geben Sie für $1 \leq i \leq k$ in Zeile i jeweils ein Modell I_i explizit an. **(1 Punkt)**

Modell i	$I_i(P)$	$I_i(Q)$	$I_i(R)$
1			
2			
3			
4			
5			

Musterlösung

Modell i	$I_i(P)$	$I_i(Q)$	$I_i(R)$
1	w	w	w
2	f	w	w
3	f	f	w

Name: MUSTERLÖSUNG Matrikelnummer: ____________

ii) Sei Formel F wie zuvor. Geben Sie eine aussagenlogische Formel G an, so dass $\{ F, G \} \models \perp$. Dabei sei $\perp$ eine Formel, die immer falsch ist. Begründen Sie, warum G die erwünschte Eigenschaft hat. **(1 Punkt)**

Musterlösung

Z.B. $G = \neg R$. Damit wird $F \wedge G$ unerfüllbar und somit folgt alles, auch $\perp$, daraus.

c) i) Zeigen Sie, dass die Relation „=" (Identität) auf einer nichtleeren Menge M eine Halbordnung ist. **(3 Punkte)**

Musterlösung

Nachweis der Eigenschaften Reflexivität, Transitivität, Antisymmetrie.

ii) Geben Sie für die Menge $M = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ das Hasse-Diagramm dieser Halbordnung an. **(1 Punkt)**

Musterlösung

Alle Knoten auf einer Ebene, keine Kanten.

d) Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G_1 = (V, E)$ mit $V = \mathbb{Z}_4$ und

$$E = \{\{x, y\} \in V \times V \mid x \cdot y \bmod 2 = 0\}.$$

Geben Sie die Adjazenzmatrix A von G_1 an. **(1 Punkt)**

Musterlösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Sei n die Anzahl der Knoten in einem gerichteten, streng zusammenhängenden Graphen G_2. Geben Sie die kleinstmögliche Anzahl an Kanten in Abhängigkeit von n für G_2 an. **(1 Punkt)**

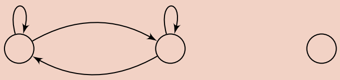
Musterlösung

$$\begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1 \\ n & \text{sonst} \end{cases}$$

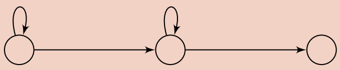
f) Gegeben sei nun ein gerichteter Graph G_3 mit $n > 2$ Knoten und $(n-1)^2$ Kanten. Zeigen oder widerlegen Sie, dass G_3 immer zusammenhängend ist. **(2 Punkte)**

Musterlösung

G_3 muss nicht (schwach oder streng) zusammenhängend sein.
Gegenbeispiel: ($n = 3$ Knoten, $(n-1)^2 = 4$ Kanten)
Z.B.:



oder



Name: MUSTERLÖSUNG Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 2: Homomorphismen (8 Punkte)

Seien die Alphabete $A = \{\, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c} \,\}$ und $B = \{\, \texttt{0}, \texttt{1} \,\}$ gegeben.

a) Sei $f\colon A^* \to B^*$ eine Funktion mit $f(\texttt{aa}) = \texttt{01}$. Kann es sich bei f um einen Homomorphismus handeln? Falls ja, geben Sie eine vollständige Definition von f auf A an; falls nein, begründen Sie. **(1 Punkt)**

Musterlösung

f kann kein Homomorphismus sein. Denn dann würde gelten $f(\texttt{aa}) = f(\texttt{a})f(\texttt{a}) = \texttt{01}$. Alle Fälle $f(\texttt{a})$ zu definieren führen damit zu einem Widerspruch.

b) Sei $g\colon A^* \to B^*$ eine Funktion mit

$$g(\texttt{aabc}) = g(\texttt{cbc}) = w$$

für ein $w \in B^*$.

i) Sei L die Sprache, die genau die Wörter w enthält, für die es einen Homomorphismus g mit obiger Eigenschaft gibt. Geben Sie einen Mengenausdruck für die Sprache L an und begründen Sie. **(3 Punkte)**

Musterlösung

Damit g ein Homomorphismus ist, muss $g(\texttt{aabc}) = g(\texttt{aa}) \cdot g(\texttt{bc})$ und $g(\texttt{cbc}) = g(\texttt{c}) \cdot g(\texttt{bc})$ gelten, für die Gleichheit daher auch $g(\texttt{aa}) \cdot g(\texttt{bc}) = g(\texttt{c}) \cdot g(\texttt{bc})$ und somit $g(\texttt{aa}) = g(\texttt{c})$. Somit kann $g(\texttt{a})$ und $g(\texttt{b})$ frei gewählt werden, $g(\texttt{c}) = g(\texttt{a}) \cdot g(\texttt{a})$ ergibt sich. Damit gilt $L = \{\, uuvuu \mid u, v \in B^* \,\}$.

ii) Mit L' wollen wir die Sprache der Wörter w bezeichnen, für die es einen Homomorphismus g mit der Eigenschaft aus der vorangegangenen Teilaufgabe i) und der zusätzlichen Eigenschaft $g(\texttt{b}) = 1$ gibt. Was lässt sich über die Länge der Worte in L' sagen? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Musterlösung

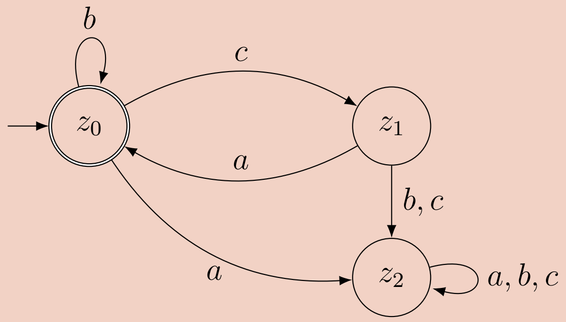
Die Sprache $L' = \{\, uu1uu \mid u \in B^* \,\}$ ergibt sich aus Teil i), für die Längen l der Worte $w \in L'$ muss also gelten $l \in \{\, 4n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

c) Sei $h\colon A^* \to B^*$ ein Homomorphismus mit $h(\mathtt{a}) = \mathtt{1}$, $h(\mathtt{b}) = \mathtt{01}$ und $h(\mathtt{c}) = \mathtt{010}$. Für beliebige Sprachen L sei ferner $h^{-1}(L) = \{\, w \mid h(w) \in L \,\}$. Wir betrachten nun die Sprache $L_{01} = \{\, (\mathtt{01})^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Geben Sie einen endlichen Akzeptor mit höchstens vier Zuständen für $h^{-1}(L_{01})$ an. **(2 Punkte)**

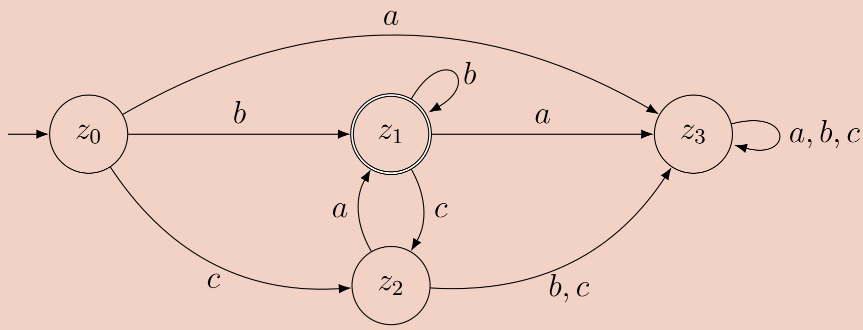
Musterlösung

In Aufgabenstellung nicht eindeutig, ob $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{N} = \mathbb{N}_+$ gemeint, daher beides korrekt.

Lösung für $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$, d.h. $L_{01} = \{\, (\mathtt{01})^n \mid n \in \mathbb{N}_0 \,\}$:



Lösung für $\mathbb{N} = \mathbb{N}_+$, d.h. $L_{01} = \{\, (\mathtt{01})^n \mid n \in \mathbb{N}_+ \,\}$:



Name: MUSTERLÖSUNG Matrikelnummer: ____________

Aufgabe 3: Huffman-Codierung (9 Punkte)

Seien

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{a_1\} \text{ und} \\ \forall i > 1: \quad \mathcal{A}_i &= \{a_i\} \cup \mathcal{A}_{i-1} \end{aligned}$$

Alphabete, über denen die folgenden Sprachen induktiv definiert sind:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\, a_1 \,\} \\ L_2 &= \{\, a_1^8 a_2,\ a_2 a_1^8 \,\} \\ \forall n \geq 3: L_n &= \{\, uv^2 a_n a_{n-1}^7 \mid u \in L_{n-1}, v \in L_{n-2} \,\} \cup \{\, a_n a_{n-1}^7 uv^2 \mid u \in L_{n-1}, v \in L_{n-2} \,\} \end{aligned}$$

a) Geben Sie explizit alle Wörter $w \in L_3$ an. **(2 Punkte)**

Musterlösung

$L_3 = \{a_1^8 a_2 a_1^2 a_3 a_2^7,\ a_3 a_2^7 a_1^8 a_2 a_1^2,\ a_2 a_1^{10} a_3 a_2^7,\ a_3 a_2^8 a_1^{10}\}$

b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ und $w \in L_n$ gilt: **(5 Punkte)**

$$N_{a_1}(w) = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n$$

Hinweise: Verwenden Sie starke Induktion. Sie können davon ausgehen, dass a_1 in allen $w \in L_n$ gleich oft vorkommt, ohne es zu beweisen.

Musterlösung

Sei $b_n := N_{a_1}(w),\ w \in L_n$ die Anzahl der a_1 in w. Nach Definition von L_n gilt:

$$b_1 = 1$$
$$b_2 = 8$$
$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2},\ \forall n > 2$$

Wir wollen also beweisen, dass

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n \ .$$

Wir führen den Beweis mittels starker Induktion.

Induktionsanfang Für $n = 1$ gilt

$$b_1 = 1 = 3 \cdot 2^0 + 2 \cdot (-1)^1 = 3 - 2 \ .$$

Genauso gilt für $n = 2$

$$b_2 = 8 = 3 \cdot 2^1 + 2 \cdot (-1)^2 = 6 + 2 \ .$$

Induktionsvoraussetzung Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_+$, $n > 2$ gelte $\forall k < n : b_k = 3 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot (-1)^k$.

Induktionsschritt *Starke Induktion ist nötig, da die Induktionsvoraussetzung nicht nur für $n-1$, sondern auch für $n-2$ gelten muss.*

$$\begin{aligned}
b_n &= b_{n-1} + 2b_{n-2} \\
(IV) \quad &= 3 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot (-1)^{n-1} + 2\left(3 \cdot 2^{n-3} + 2 \cdot (-1)^{n-2}\right) \\
&= 3 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot (-1)^{n-1} + 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-3} + 2 \cdot 2 \cdot (-1)^{n-2} \\
&= 3 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot (-1)^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + 4 \cdot (-1)^{n-2} \\
&= 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1} + 4 \cdot (-1)^{n-2} \\
&= 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot \left((-1)^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-2}\right) \\
&= 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^n
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus der Fallunterscheidung in gerade und ungerade $n \in \mathbb{N}$.

$$(-1)^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-2} = \begin{cases} -1, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

q.e.d.

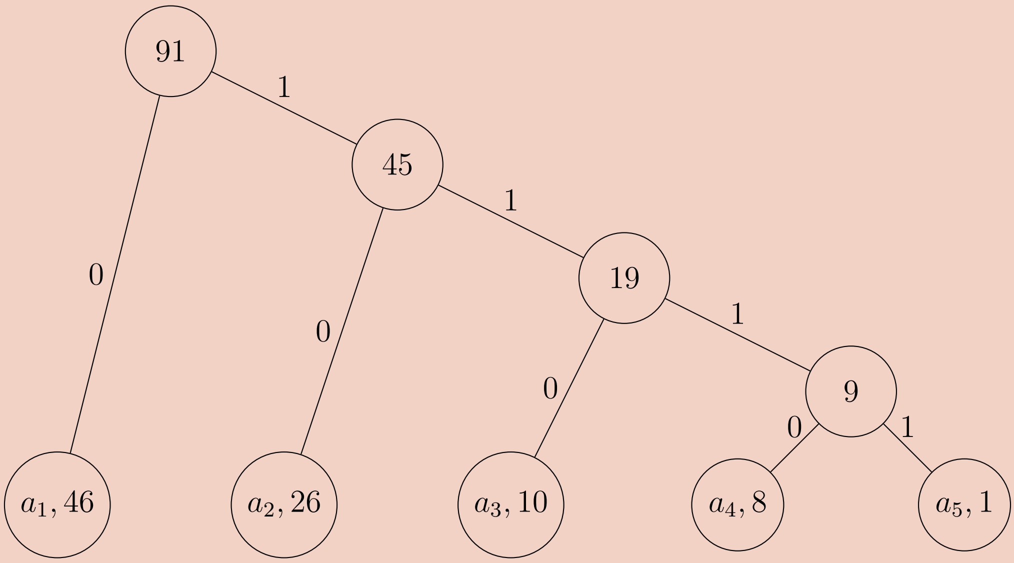
Name: MUSTERLÖSUNG Matrikelnummer: ____________

c) Die Anzahl der a_i in beliebigen $w \in L_n$ kann durch folgende Formel angegeben werden:

$$N_{a_i}(w) = 3 \cdot 2^{n-i} + 2 \cdot (-1)^{n-i+1} \ .$$

Zeichnen Sie den Huffman-Baum für alle $w \in L_5$ und berechnen Sie die Länge $|H(w)|$ der entsprechenden Codierungen $H(w)$. **(2 Punkte)**

Musterlösung



$$\begin{aligned}
|H(w)| &= 46|H(a_1)| + 26|H(a_2)| + 10|H(a_3)| + 8|H(a_4)| + |H(a_5)| \\
&= 46 \cdot 1 + 26 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 4 \\
&= 164
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Logik (7 Punkte)

a) Sei das Alphabet der Aussagenlogik (wie in der Vorlesung) gegeben als:

$$A_{AL} = \{\, (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow \,\} \cup Var_{AL}$$

.

i) Wie viele synatktisch unterschiedliche Formeln lassen sich durch die in der Vorlesung eingeführten Konstruktionsabbildungen für aussagenlogische Formeln genrieren, wenn $Var_{AL} = \{\, A, B \,\}$? **(1 Punkt)**

Musterlösung

Es lassen sich unendlich viele unterschiedliche Formeln generieren. Zum Beispiel beliebig viele $\neg$ vor Variable A.

ii) Wie viele semantisch unterschiedliche Formeln lassen sich, durch die in der Vorlesung eingeführten Konstruktionsabbildungen für aussagenlogische Formeln genrieren, wenn $Var_{AL} = \{\, A \,\}$? **(1 Punkt)**

Musterlösung

Es lassen sich vier semantisch unterschiedliche Formeln generieren: $\top, \bot, A, \neg A$

b) Vereinfachen Sie die folgende Formel zu einer äquivalenten Formel, in der keine Implikation mehr vorkommt und die Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ direkt vor Variablen stehen. Geben Sie dabei mindestens zwei Zwischenschritte an. **(2 Punkte)**

$$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg C)$$

Musterlösung

$\neg(\neg A \rightarrow B) \vee (\neg\neg C)$
$\neg(\neg A \rightarrow B) \vee C$
$\neg(A \vee B) \vee C$
$(\neg A \wedge \neg B) \vee C$

c) Zeigen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) Die Formel $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (\neg C)$ ist erfüllbar. **(2 Punkte)**

Musterlösung

Wahrheitstabelle: Wir bezeichnen die obige Formel mit F.

A	B	C	$(A \vee B)$	$(A \vee \neg B)$	$(A \rightarrow C)$	$(\neg C)$	F
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0

Die Formel F ist für keine Belegung wahr und damit ist sie nicht erfüllbar. Die Aussage ist damit falsch.

ii) Die Formel $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$ ist eine Tautologie. **(1 Punkt)**

Musterlösung

Umformung der Formel zu:
$(B \vee \neg B) \vee (C \vee \neg A)$
$B \vee \neg B)$ ist immer wahr, eine wahre Formel verodert mit einer anderen Formel ist immer wahr. Daher ist die gesamte Formel immer wahr und somit eine Tautologie.

Aufgabe 5: Grammatiken (10 Punkte)

a) Gegeben sei die Grammatik $G_1 = (N, T, S, P)$ mit

$$
\begin{aligned}
N =& \{S, X\} \\
T =& \{a, b, c\} \\
P =& \{S \to aSc \mid X\,, \\
& \quad X \to Xb \mid \varepsilon \\
& \}
\end{aligned}
$$

i) Geben Sie $L(G_1)$ explizit als Mengenausdruck an. Triviale Beschreibungen wie $L(G_1) = \{w \mid S \Rightarrow^* w\}$ geben keine Punkte. **(1 Punkt)**

ii) Gibt es eine rechtslineare Grammatik, welche $L(G_1)$ erzeugen kann? Begründen Sie. **(1 Punkt)**

Musterlösung

i) $L(G_1) = \{a^n b^m c^n \in \{a, b, c\}^* \mid n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_0\}$

ii) Nein, keine rechtslineare Grammatik kann $L(G_1)$ erzeugen. Betrachte eine beliebige rechtslineare Grammatik R. Produktionen dieser Grammatik sind immer von der Form $X \to wY$ bzw. $X \to w$ für Terminalwort w. Eine Produktion, welche die gleiche Anzahl a und c erzeugen würde, kann nur die Form $X \to acY$ haben. So lässt sich aber keine beliebige Anzahl an b zwischen a und c erzeugen.

b) Gegeben sei die formale Sprache $L_2 = \{a^n b^m c^k \in \{a, b, c\}^* \mid n, m, k \in \mathbb{N}_0 \wedge m + n = k\}$.

i) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 an, so dass $L(G_2) = L_2$. **(2 Punkte)**

ii) Geben Sie den Ableitungsbaum zu $w = aabbcccc$ an. **(1 Punkt)**

iii) Wie können Sie G_2 modifizieren, so dass Ihre Grammatik nun L_2^* erzeugt? **(1 Punkt)**

Name: MUSTERLÖSUNG Matrikelnummer: ____________

Musterlösung

i) Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit

$$
\begin{aligned}
N =& \{S, X\}\\
T =& \{a, b, c\}\\
P =& \{S \rightarrow aSc \mid X\\
& \quad X \rightarrow bXc \mid \varepsilon\\
& \quad \}
\end{aligned}
$$

ii) $S \Rightarrow aSc \Rightarrow aaScc \Rightarrow aaXcc \Rightarrow aabXccc \Rightarrow aabbXcccc \Rightarrow aabbcccc$

iii) Nutze neues Nichtterminalsymbol S^* als Startsymbol. Erweitere die Produktionen um $S^* \rightarrow S^*S^*$ und $S^* \rightarrow S$. Diese neue Grammatik erzeugt nun L_2^*.

c) Gegeben sei die Grammatik $G_3 = (N, T, S, P)$ mit

$$
\begin{aligned}
N =& \{S, Y\}\\
T =& \{0, 1\}\\
P =& \{S \rightarrow 1Y00\\
& \quad Y \rightarrow 1Y \mid 0Y \mid \varepsilon\\
& \quad \}
\end{aligned}
$$

i) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, welcher $L(G_3)$ erzeugt. **(1 Punkt)**

ii) Begründen Sie warum für alle $w \in L(G_3)$ die folgende Eigenschaft gilt: **(1 Punkt)**

$$Num_2(w) \bmod 4 = 0.$$

Musterlösung

i) $1(0 \mid 1) * 00$

ii) Bei Binärzahlen, welche durch 4 teilbar sind, ist sowohl das nullte als auch das erste Bit nicht gesetzt. Durch die Ableitungsregel $S \rightarrow 1Y00$ enden alle durch G_3 erzeugten Wörter mit 00 und sind somit auch ohne Rest durch 4 teilbar.

d) Wir betrachten im folgenden zwei beliebige Grammatiken $G_4 = (N_4, T_4, S_4, P_4)$ und $G_5 = (N_5, T_5, S_5, P_5)$. Geben Sie eine Konstruktion für eine Grammatik G_6 an, welche $L(G_4) \cdot L(G_5)$ erzeugt. **(2 Punkte)**

Musterlösung

Sei S ein neues Nichtterminalsymbol und $P = P_1 \cup P_2 \cup S \rightarrow S_1S_2$ eine neue Produktionsmenge. Die Grammatik $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P)$ erzeugt nun $L(G_4) \cdot L(G_5)$.
Begründung: Da S_1 Startsymbol von G_4 ist, gilt für beliebige $w_1 \in L(G_4)$: $S_1 \Rightarrow^* w_1$. Gleiches gilt für beliebige $w_2 \in L(G_5)$ und S_2. Für w_1w_2 erhalten wir also folgende Ableitungskette: $S \Rightarrow S_1S_2 \Rightarrow^* w_1w_2$.

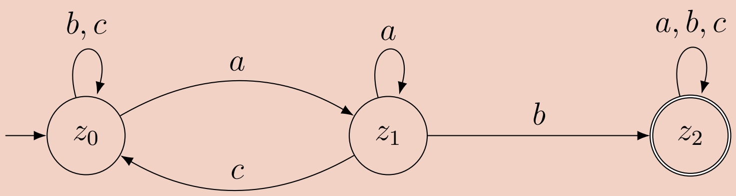
Name: MUSTERLÖSUNG Matrikelnummer: ______________

Aufgabe 6: Automaten und reguläre Ausdrücke (7 Punkte)

a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A_1 = (Z, z_0, \Sigma, f, F)$ mit $|Z| \leq 4$ und $\Sigma = \{a, b, c\}$ an, der L_1 akzeptiert. **(1 Punkt)**

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält } ab \text{ als Teilwort}\}$$

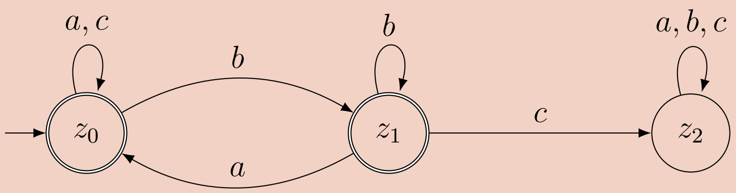
Musterlösung



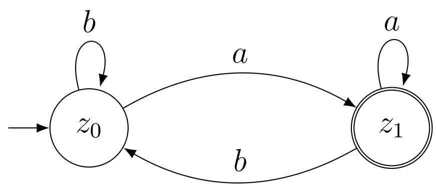
b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A_2 = (Z, z_0, \Sigma, f, F)$ mit $|Z| \leq 4$ und $\Sigma = \{a, b, c\}$ an, der L_2 akzeptiert. **(1 Punkt)**

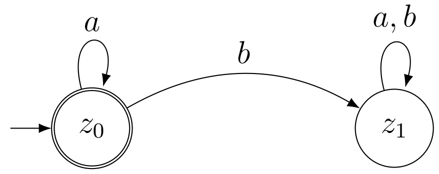
$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält nicht } bc \text{ als Teilwort}\}$$

Musterlösung

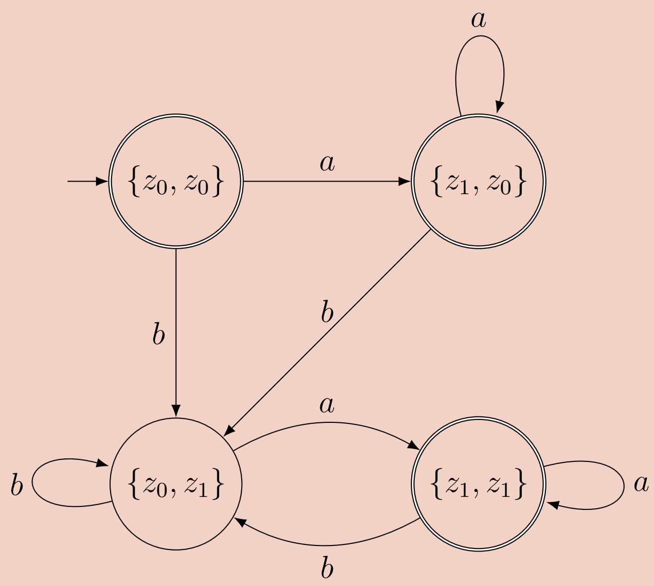


c) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A_3 = (Z, z_0, \Sigma, f, F)$ mit $|Z| \leq 5$ und $\Sigma = \{a, b\}$ an, der alle Wörter akzeptiert, welche durch mindestens einen der angegebenen Automaten akzeptiert werden. **(2 Punkte)**





Musterlösung



4 Zustände, ziemlich simple, daher 2 Punkte

Name: MUSTERLÖSUNG   Matrikelnummer: ______________

d) Gegeben sei eine unendliche Menge beliebiger Automaten $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}_+\}$ und die von Ihnen aktzeptierten Sprachen $L(A_i)$. Sei ferner $L' = \bigcup_{i=1}^{\infty}(L(A_i))$. Gibt es immer einen endlichen Automaten A' mit $L(A') = L'$? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Musterlösung

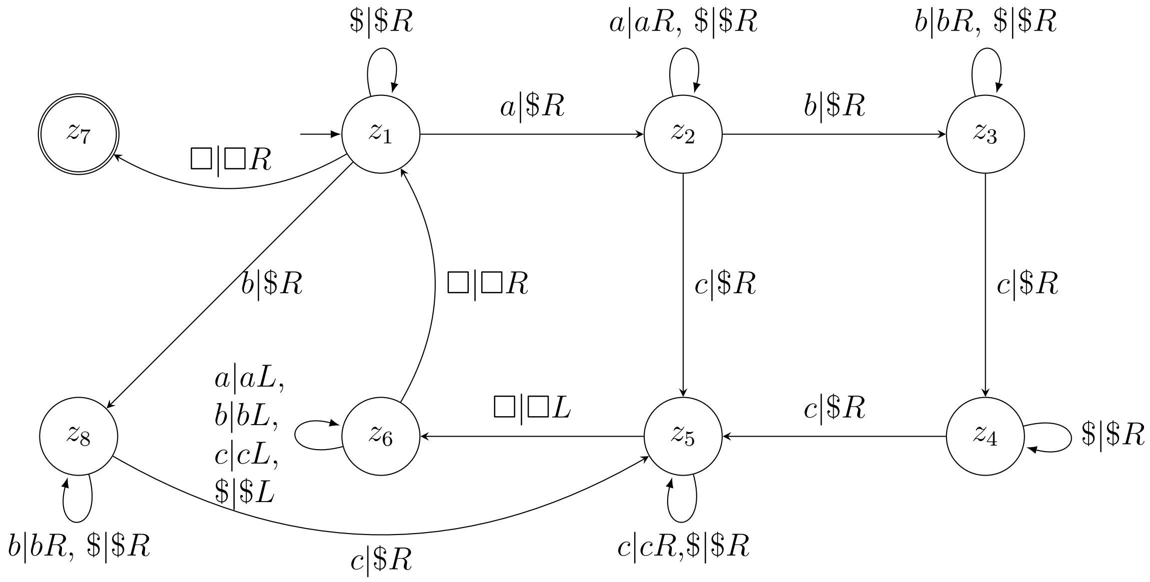
Nein, da zum Beispiel $a^n b^n$ generiert werden kann $(L(A_i) = \{a^i b^i\})$

e) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache L_1 aus Teilaufgabe a) beschreibt. **(1 Punkt)**

Musterlösung

$(a|b|c)^* ab (a|b|c)^*$

☐ Aufgabe 7: Turingmaschinen (8 Punkte)



a) Führen Sie die Turingmaschine für die Eingabe *aabbcccc* aus und geben Sie jeweils das Arbeitsband an, wenn die Turingmaschine von Zustand z_6 in den Zustand z_1 übergeht. **(1 Punkt)**

Musterlösung

□	\$	a	\$	b	\$	\$	c	c	□	□
□	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$	□	□

Name: MUSTERLÖSUNG Matrikelnummer: ____________

b) Führen Sie die Turingmaschine für die Eingabe *abbcc* aus und geben Sie jeweils das Arbeitsband an, wenn die Turingmaschine von Zustand z_6 in den Zustand z_1 übergeht. **(1 Punkt)**

Musterlösung

$\Box$	\$	\$	\$	b	\$	\$	$\Box$

c) Geben Sie die Sprache an, welche durch die obige angegebene Turingmaschine akzeptiert wird. **(2 Punkte)**

Musterlösung

Sprache: $L = \{a^k b^l c^m \mid m = k + l\}$, mit $m, k, l \in \mathbb{N}_0$

d) Ist die von Ihnen angegebene Sprache in Aufgabenteil c) entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1 Punkt)**

Musterlösung

Ja, da es eine Turingmaschine gibt, welche die Sprache L akzeptiert (siehe oben) und da diese Turingmaschine für alle Eingaben immer hält.

e) Ist die von Ihnen angegebene Sprache in Aufgabenteil c) aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1 Punkt)**

Musterlösung

Ja, da die Sprache entscheidbar ist, ist sie auch aufzählbar (hält für Wörter aus der Sprache L).

f) Entwerfen Sie eine TM mit Bandalphabet $X = \{g, i, l, b, e, r, t, \$, \Box\}$, die nach vollständiger Bearbeitung einer beliebigen Eingabe mit Eingabealphabet $X \setminus \{\Box\}$ ausschließlich das Wort **gbi** auf dem Arbeitsband stehen hat. **(2 Punkte)**

Musterlösung

Eine mögliche Lösung: