Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 2
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe:	Freitag, 04.11.2022, 12:00 Uhr
Abgabe:	Freitag, 11.11.2022, 12:30 Uhr Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter “Tutorien” im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 2:	/ 21	Blätter 1 – 2, Stud. 1:	/ 42
		Blätter 1 – 2, Stud. 2:	/ 42

Aufgabe 2.1 **(2 + 1 + 1 + 2 = 6 Punkte)**
Gegeben ist die zweistellige Funktion

$$\boxdot \colon \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+, \quad (e,d) \mapsto e \cdot d + 1$$

auf den natürlichen Zahlen, die Sie als Operator in Infix-Notation (also $e \boxdot d$ statt $\boxdot(e,d)$) schreiben können.

a) Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

I) $\boxdot$ ist kommutativ.

II) $\boxdot$ ist assoziativ.

Bezeichne im Folgenden $Z_2 = \{0,1\}$. Die Menge Z_2^n ist demnach die Menge der Bitfolgen der Länge $n \in \mathbb{N}_+$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist der Operator $\oslash_n$ (wieder in Infixnotation notierbar) folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{rcl} \oslash_n \colon Z_2^n \times Z_2^n & \to & Z_2^n, \\ (v,w) & \mapsto & z \end{array}$$

$$\text{mit } z(i) = 1 \text{ gdw. } w(i) = 1 \text{ und } v(i) = 1 \text{ für } 0 \le i < n.$$

b) Zählen Sie alle Wörter $w \in Z_2^3$ auf, bei denen in $w \oslash_3 001$ genau eine 1 vorkommt.

c) Geben Sie die Mächtigkeit der Menge $\{x \in Z_2^n \mid x \oslash_n 0^{n-1}1 \neq 0^n\}$ in Abhängigkeit von $n > 1$ an.

d) Zeigen Sie oder widerlegen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+$:

I $\oslash_n$ ist kommutativ.

II $\oslash_n$ ist assoziativ.

Lösung 2.1

a) I) $\boxdot$ ist kommutativ.
Zu zeigen: $\forall e,d \in \mathbb{N}_+ : e \boxdot d = d \boxdot e$
Durch Einsetzen der Definition und mit Kommutativität der Multiplikation erhält man $e \boxdot d = e \cdot d + 1 = d \cdot e + 1 = d \boxdot e$.

II) $\boxdot$ ist nicht assoziativ.
Als Gegenbeispiel betrachten wir:

$$(1 \boxdot 2) \boxdot 3 = (1 \cdot 2 + 1)\dot{3} + 1 = 10 \tag{1}$$

$$\neq 1 \boxdot (2 \boxdot 3) = 1 \cdot (2 \cdot 3 + 1) + 1 = 8 \tag{2}$$

b) Die Menge $\{w \in \mathbb{Z}_2 | w \oslash_3 001 \text{ enthält genau eine } 1\} = \{001, 011, 101, 111\}$

c) $x \oslash_n 0^{n-1}1 \neq 0^n$ genau dann, wenn das letzte Bit in x gesetzt ist. Damit ist jedes der $n-1$ verbleibenden Bits frei wählbar und es gilt $|\{x \in Z_2^n \mid x \oslash_n 0^{n-1}1 \neq 0^n\}| = 2^{n-1}$

d) I) $\oslash_n$ ist kommutativ
Zu zeigen: $\forall a,b \in Z_2^n : a \oslash_n b = b \oslash_n a$
Wir betrachten $a \oslash_n b = z$ und $b \oslash_n a = z'$. Nach Definition gilt für alle $0 \le i < n$

$$z(i) = 1 \quad \text{gdw.} \quad a(i) = 1 \text{ und } b(i) = 1 \tag{3}$$

$$\text{gdw.} \quad b(i) = 1 \text{ und } a(i) = 1 \tag{4}$$

$$\text{gdw.} \quad z'(i) = 1 \tag{5}$$

II) $\owedge_n$ ist assoziativ.
Zu zeigen: $\forall a, b \in Z_2^n : a \owedge (b \owedge c) = (a \owedge b) \owedge c$.
Seien $z_{ab} = a \owedge_n b$ und $z_{bc} = b \owedge_n c$.
Wir betrachten $a \owedge (b \owedge c) = z$ und $(a \owedge b) \owedge c = z'$ Dann gilt nach Definition von $\owedge_n$:

$$\begin{aligned} z(i) = 1 \quad & \text{gdw.} \quad a(i) = 1 \text{ und } z_{bc}(i) = 1 && (6)\\ & \text{gdw.} \quad a(i) = 1 \text{ und } b(i) = 1 \text{ und } c(i) = 1 && (7)\\ & \text{gdw.} \quad z_{ab}(i) = 1 \text{ und } c(i) = 1 && (8)\\ & \text{gdw.} \quad z'(i) = 1 && (9) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2 (0,5 + 1 + 2,5 + 1 + 1 = 6 Punkte)
Sei Z_2^n wieder die Menge der Bitfolgen der Länge $n \in \mathbb{N}_+$. Außerdem bezeichne im Folgenden $\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N}_0 \mid k < n\}$ die Menge der natürlichen Zahlen (echt) kleiner als $n \in \mathbb{N}_0$. Sei C eine nichtleere endliche Menge mit $|C| = n \in \mathbb{N}_+$. Eine bijektive Funktion $a \colon \mathbb{Z}_n \to C$ zählt die Elemente in C auf. Für eine gegebene solche Aufzählfunktion a übersetzt die Funktion τ_a die Elemente aus C auf Bitfolgen der Länge n vermittels

$$\tau_a \colon C \to Z_2^n,\ x \mapsto z$$
$$\text{mit } z(i) = 1 \text{ gdw. } a(i) = x \text{ für } 0 \le i < n.$$

a) Seien $C = \{0, 1, 2\}$ und die Aufzählfunktion $a : \mathbb{Z}_3 \to C$ mit $a(x) = x$ gegeben. Geben Sie $\tau_a(0)$, $\tau_a(1)$, und $\tau_a(2)$ an.
b) τ_a ordnet jedem Element aus C eine Bitfolge zu. Verallgemeinern Sie dieses Prinzip zu einer Funktion $T_a : 2^C \to Z_2^n$, die jeder Teilmenge X von C die Bitfolge $T_a(X)$ zuordnet, in dem genau die Indizes i zu 1 auswerten, deren über a erreichte Elemente in X enthalten sind. Das Wort $T_a(X)$ repräsentiert also gewissermaßen X als (charakteristische) Bitfolge.
Geben Sie eine Funktionsdefinition von T_a an. (**Hinweis:** Sie können sich an der Definition von τ_a orientieren.)
c) Zeigen Sie: T_a ist bijektiv.
d) Seien a und a' zwei verschiedene Aufzählungen von C und $n \ge 2$ (Elemente in andere Reihenfolge). Zeigen oder widerlegen Sie:

$$X = \emptyset \text{ oder } X = C \quad \text{gdw.} \quad T_a(X) = T_{a'}(X) \tag{10}$$

e) Geben Sie einen Operator $\ovee \colon Z_2^n \times Z_2^n \to Z_2^n$ an mit folgenden Eigenschaften:

$$T_a(A) \ovee T_a(B) = T_a(A \cup B) \quad \text{für alle } A, B \subseteq C$$

Hinweis: Der Operator $\ovee$ soll also das Prinzip der Mengenvereinigung auf die Bitfolgen, die endliche Mengen charakterisieren, verallgemeinern. Welche sind nun die Indizes, an denen eine 1 stehen muss?

Lösung 2.2
a) $\tau_a(0) = 100$, $\tau_a(1) = 010$, $\tau_a(2) = 001$
b) $T_a(X) = z$ mit $z(i) = 1$ gdw. $a(i) \in X$ für $0 \le i < n$.
c) Zu zeigen: T_a ist injektiv und surjektiv.

Injektivität $: \forall X, X' \subseteq C. T_a(X) = T_a(X') \Rightarrow X = X'$
Sei also $T_a(X) = T_a(X') = z$. Damit $X = X'$ müssen wir zeigen, dass $X \subseteq X'$ und $X' \subseteq X$.

- Richtung $X \subseteq X'$:
  Sei $x = a(i) \in X$. Es gilt $z(i) = 1$ nach
  $$z(i) = 1 \quad \text{gdw.} \quad a(i) \in X \tag{11}$$
  Da $z(i) = 1$ gilt auch $a(i) \in X'$ nach
  $$z(i) = 1 \quad \text{gdw.} \quad a(i) \in X' \tag{12}$$
- Richtung $X' \subseteq X$:
  Sei $x = a(i) \in X'$. Es gilt $z(i) = 1$ nach
  $$z(i) = 1 \quad \text{gdw.} \quad a(i) \in X' \tag{13}$$
  Da $z(i) = 1$ gilt auch $a(i) \in X$ nach
  $$z(i) = 1 \quad \text{gdw.} \quad a(i) \in X \tag{14}$$

Surjektivität $: \forall z \in \mathbb{Z}_2^n . \exists X \subseteq C. T_a(X) = z$
Wir konstruieren ein $X \subseteq C$ für jedes gegebene z. Sei also $z \in \mathbb{Z}_2^n$ beliebig. Nach Definition von $z = T_a(X)$ gilt

$$z(i) = 1 \quad \text{gdw.} \quad a(i) \in X \tag{15}$$

Damit erfüllt die Menge $X = \{a(i) \in C \mid z(i) = 1\}$ die gewünschte Eigenschaft.

d) Die Eigenschaft ist falsch. Wir geben folgendes Gegenbeispiel an: Sei $C = \{0, 1, 2\}$ und verschiedene a, a' gegeben durch

i	$a(i)$	$a'(i)$
0	0	0
1	1	2
2	2	1

Dann gilt $T_a(\{0\}) = 100 = T_{a'}(\{0\})$ für $\emptyset \neq \{0\} \neq C$.

e) $x \obslash y = z$ mit $z(i) = 1$ gdw. $x(i) = 1$ oder $y(i) = 1$ für $0 \leq i < n$.

Aufgabe 2.3 (3 + 3 = 6 Punkte)
Seien $a, b, c \in M$ beliebig und $F : 2^M \to B$ eine injektive Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$F(X) \boxdot F(Y) = F(X \cup Y) \tag{16}$$
$$F(X) \diamond F(Y) = F(X \cap Y) \; . \tag{17}$$

Wir wollen Beziehungen der Form $a \Box b \bigcirc a \Box c$ betrachten, wobei $\Box \in \{=, \neq\}, \bigcirc \in \{\text{und}, \text{oder}\}$. Welche dieser Beziehungen für a, b, c folgen aus den Gleichungen und Ungleichungen über F? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

a) I) $F(\{a\}) \neq F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})$
II) $F(\{a\}) = F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})$

b) I) $F(\{a\}) = (F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})) \diamond F(\{a\})$
   II) $F(\{a\}) \neq (F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})) \diamond F(\{a\})$

Lösung 2.3

a) (Lösung für (I) und (II)) Wir betrachten zuerst $F(\{a\}) = F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})$ statt $F(\{a\}) \neq F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})$.
Mit Gleichung (16) gilt $F(\{a\}) = F(\{b\}) \boxdot F(\{c\}) = F(\{b, c\})$.
Aus dieser Gleichung folgt dann mit der Injektivität von F, dass $\{a\} = \{b, c\}$ gelten muss.
Das ist genau dann der Fall, wenn $a = b$ und $a = c$.
Wenn wir die Beziehungen für $F(\{a\}) \neq F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})$ zeigen wollen folgt mit Gleichung (16) $F(\{a\}) \neq F(\{b\}) \boxdot F(\{c\}) = F(\{b, c\})$.
Aufgrund der Rechtseindeutigkeit von Funktionen können bei ungleichen Funktionswerten auch die Eingaben nicht gleich sein, also muss $\{a\} \neq \{b, c\}$ gelten. Es darf also darf $\{a\} = \{b, c\}$ genau nicht gelten. Nach obiger Lösung darf also $a = b$ und $a = c$ genau nicht gelten und wir erhalten $a \neq b$ oder $a \neq c$ als resultierende Beziehungen.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
& (F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})) \diamond F(\{a\}) && (18)\\
\text{(16)} \quad & = F(\{b, c\}) \diamond F(\{a\}) && (19)\\
\text{(17)} \quad & = F(\{b, c\} \cap \{a\}) && (20)
\end{aligned}$$

I) Es gilt also $F(\{a\}) = F(\{b, c\} \cap \{a\})$. Mit der Injektivität von F muss dann gelten, dass $\{a\} = \{b, c\} \cap \{a\}$. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $\{b, c\} \cap \{a\} \subseteq \{a\}$ und $\{a\} \subseteq \{b, c\} \cap \{a\}$.
   - Richtung $\{b, c\} \cap \{a\} \subseteq \{a\}$:
     Sei $x \in \{b, c\} \cap \{a\}$. Dann gilt $x = a$ und damit auch $x \in \{a\}$.
   - Richtung $\{a\} \subseteq \{b, c\} \cap \{a\}$:
     Sei $x \in \{a\}$, dann $x = a$.
     $x = a \in \{b, c\} \cap \{a\}$ gdw. $a \in \{b, c\}$. Das ist genau dann der Fall, wenn $a = b$ oder $a = c$.

   Also muss gelten, dass $a = b$ oder $a = c$.

II) Es gilt also $F(\{a\}) \neq F(\{b, c\} \cap \{a\})$. Mit der Rechtseindeutigkeit von Funktionen muss also gelten $\{a\} \neq \{b, c\} \cap \{a\}$. Das ist genau der Fall, wenn $\{a\} = \{b, c\} \cap \{a\}$ nicht gilt. Nach Teilaufgabe (I) darf also genau $a = b$ oder $a = c$ nicht gelten. Das ist genau dann der Fall, wenn $a \neq b$ und $a \neq c$ gilt.

Aufgabe 2.4 (1 + 2 = 3 Punkte)

Sei M eine endliche Menge mit $|M| = m \geq 2$. Wir wollen einen Blick auf die Menge B_M der binären Operationen auf M werfen, also $B_M = M^{M \times M}$.

a) Geben Sie die Zahl der binären Operationen auf M an, also $|B_M|$. Eine Begründung ist nicht notwendig.

b) Geben Sie die Zahl der kommutativen Operationen auf M an, also

$$|\{f : M \times M \to M \mid f \text{ ist kommutativ.}\}| \ .$$

Hier reicht eine informelle Begründung.

Lösung 2.4

a) $|B_M| = m^{(m^2)}$.
Begründung (nicht gefordert): Die Menge der Paare $\{(a,b) \mid a,b \in M\}$ hat m^2 Elemente. Für jede Eingabe $(a,b) \in M \times M$ kann die binäre Operation auf einen der m Elemente von M abbilden.

b) $|\{f : M \times M \to M \mid f \text{ ist kommutativ.}\}| = m^{\frac{m(m+1)}{2}}$.
Begründung: Wir bezeichnen mit $\circ$ eine beliebige binäre Operation auf M.
Damit $\circ$ kommutativ ist, muss gelten, dass $\forall a,b \in M : a \circ b = b \circ a$. Die Reihenfolge der Funktionsargumente spielt also keine Rolle.
Daher betrachten wir die Menge aller zweielementigen *Mengen* $S = \{\{a,b\} \mid a,b \in M \text{ und } a \neq b\}$.
Es gibt $\binom{m}{2}$ zweielementige Mengen über einer Menge mit m Elementen. Also $S = \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.
Für jedes Element $a \in M$ ist zusätzlich offensichtlich auch $a \circ a = a \circ a$. Die Menge $\{a,a\} = \{a\}$ ist jedoch einelementig und daher nicht in S enthalten.
Daher gilt:

$$|\{f : M \times M \to M \mid f \text{ ist kommutativ.}\}| = m^{|S|+m} = m^{\frac{m(m+1)}{2}} \tag{21}$$