Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 3
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe: Freitag, 11.11.2022, 14:30 Uhr

Abgabe: Freitag, 18.11.2022, 12:00 Uhr
Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter “Tutorien” im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 3:	/ 22	Blätter 1 – 3, Stud. 1:	/ 64
		Blätter 1 – 3, Stud. 2:	/ 64

Aufgabe 3.1 (2 + 1 = 3 Punkte)
Wir untersuchen das Prinzip der Kontraposition der Aussagenlogik:

> Wenn aus Aussage A die Aussage B folgt, so folgt aus der Negation der Aussage B die Negation der Aussage A.

a) Beweisen Sie die folgende Äquivalenz: $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$.
   i) Unter Verwendung einer Wahrheitstabelle
   ii) Mittels Äquivalenzumformungen

b) Wenden Sie das Prinzip der Kontraposition auf folgenden Satz (eine alte Bauernregel) an:

   Wenn's Laub nicht vor Martini[1] fällt, kommt eine große Winterkält'.

Lösung 3.1
a) i) Die Äquivalenz wird anhand folgender Wahrheitstabelle deutlich:

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg B \rightarrow \neg A$
f	**f**	**w**	**w**
f	**w**	**w**	**w**
w	**f**	**f**	**f**
w	**w**	**w**	**w**

Da $A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow \neg A$ für jede Interpretation zum selben Wert auswerten, sind die Formeln logisch äquivalent.

   ii) Genauso kann man die Äquivalenz durch Umformung zeigen:

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv B \vee \neg A \equiv \neg\neg B \vee \neg A \equiv \neg B \rightarrow \neg A$$

.

b) *Wenn ein milder Winter kommt, so ist das Laub vor Martini gefallen.*

Aufgabe 3.2 (1 + 4 = 5 Punkte)
Wir haben in der Vorlesung eine Reihe aussagenlogischer Konnektive kennengelernt ($\wedge, \vee, \neg$ und $\rightarrow$). Um alle möglichen booleschen Funktionen als aussagenlogische Formel darzustellen zu können, werden aber nicht alle Konnektive benötigt. Man nennt eine Menge von Konnektiven, mit denen alle booleschen Funktionen als aussagenlogische Formel ausgedrückt werden können, eine *Basis der Aussagenlogik*.

Das aussagenlogische Konnektiv *NAND* ($\barwedge$) ist definiert als

$$val_I(G \barwedge H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } val_I(G) = \mathbf{f} \text{ oder } val_I(H) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

für beliebige Formeln $G, H \in For_{AL}$.

a) Geben Sie eine Wahrheitstabelle für $a \barwedge b$ an.

b) Zeigen Sie, dass $\barwedge$ eine Basis ist. Geben Sie dafür (ohne Beweis) für die folgenden Formeln je eine äquivalente aussagenlogische Formel an, die nur $\barwedge$ benutzt:
   i) $\neg P$

[1] Gemeint ist der Gedenktag des Martin von Tours am 11.11.

ii) $P \wedge Q$

iii) $P \vee Q$

iv) $P \rightarrow Q$

Lösung 3.2

a)

P	Q	$P \barwedge Q$
f	f	w
f	w	w
w	f	w
w	w	f

b) i) $\neg P \equiv P \barwedge P$

ii) $P \wedge Q \equiv (P \barwedge Q) \barwedge (P \barwedge Q)$

iii) $P \vee Q \equiv (P \barwedge P) \barwedge (Q \barwedge Q)$

iv) $P \rightarrow Q \equiv ((P \barwedge Q) \barwedge (P \barwedge P)) \barwedge (Q \barwedge Q)$ oder $P \rightarrow Q \equiv P \barwedge (Q \barwedge Q)$

Aufgabe 3.3 (3 + 1 + 3 + 2 = 9 Punkte)

Paul und Quentin wurden festgenommen, weil man sie des Ladendiebstahls bezichtigt. Ihr Kumpel Raul konnte sich unbemerkt davonmachen. Verwenden Sie die aussagenlogischen Variablen P, Q, und R für die Aussagen, dass Paul (P), Quentin(Q) oder Raul (R) gestohlen haben.

a) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in der Aussagenlogik:

1. Entweder Paul oder Quentin haben tatsächlich geklaut.
2. Falls Raul unerlaubt etwas mitgehen ließ, so haben sowohl Quentin als auch Paul keinen Diebstahl begangen.
3. Weder Raul noch Paul haben gestohlen, falls Quentin nichts stahl.

b) Stellen Sie für die aussagenlogische Formel, die Sie für 2. in a) aufgestellt haben, eine Wahrheitstabelle auf.

c) Ist die Konjunktion[2] der drei Formeln (1-3) erfüllbar oder unerfüllbar? Ist sie eine Tautologie? Begründen Sie.

d) Geben Sie das Negat der folgenden Aussagen als aussagenlogische Formel an, so dass das Negationszeichen nur direkt vor Variablen auftritt:

4. Alle drei haben gestohlen und Paul ist unschuldig,
5. Wenn Paul und Quentin nichts verbrochen haben, dann auch Raul nicht.

Lösung 3.3

a)
1. $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
2. $R \rightarrow (\neg Q \wedge \neg P)$
3. $\neg Q \rightarrow (\neg R \wedge \neg P)$

b) Wir geben die Wahrheitstabelle für $R \rightarrow (\neg Q \wedge \neg P)$ an:

[2] Eine *Konjunktion* ist eine Aussage der Form $A \wedge B$. Eine Aussage der Form $A \vee B$ heißt *Disjunktion*.

P	Q	R	$\neg Q \wedge \neg P$	$R \rightarrow (\neg Q \wedge \neg P)$
f	**f**	**f**	**w**	**w**
f	**f**	**w**	**w**	**w**
f	**w**	**f**	**f**	**w**
f	**w**	**w**	**f**	**f**
w	**f**	**f**	**f**	**w**
w	**f**	**w**	**f**	**f**
w	**w**	**f**	**f**	**w**
w	**w**	**w**	**f**	**f**

c) Die Konjunktion F der drei Formeln ist

$$F \equiv ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \wedge (R \rightarrow (\neg Q \wedge \neg P)) \wedge (\neg Q \rightarrow (\neg R \wedge \neg P)) \tag{1}$$

Wir geben eine Wahrheitstabelle für F an:

P	Q	R	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$(P \wedge \neg Q)$ $\vee (\neg P \wedge Q)$	$\neg Q \wedge \neg P$	$\neg R \wedge \neg P$	$R \rightarrow$ $(\neg Q \wedge \neg P)$	$\neg Q \rightarrow$ $(\neg R \wedge \neg P)$	F
f	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**	**f**
f	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**
f	**w**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**w**	**w**
f	**w**	**w**	**f**	**w**	**w**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**
w	**f**	**f**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	**w**	**f**	**f**
w	**f**	**w**	**w**	**f**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**
w	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**w**	**f**
w	**w**	**w**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**f**	**w**	**f**

Damit hat die Formel das Modell $I(P) = \mathbf{f}, I(Q) = \mathbf{w}, I(R) = \mathbf{f}$ und ist daher nicht unerfüllbar.
Die Interpretation $I(P) = \mathbf{w}, I(Q) = \mathbf{w}, I(R) = \mathbf{f}$ ist allerdings nicht Modell von F. Daher kann F auch nicht allgemeingültig sein.

d) 4. Die aussagenlogische Formalisierung der Aussage lautet:

$$P \wedge Q \wedge R \wedge \neg P \tag{2}$$

Das Negat ist dann:

$$\begin{aligned}
& \neg(P \wedge Q \wedge R \wedge \neg P) \\
\equiv\ & \neg((P \wedge Q \wedge R) \wedge \neg P) \quad (\text{ implizite Linksklammerung }) \\
\equiv\ & \neg(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg\neg P \quad (\text{ DeMorgan }) \\
\equiv\ & \neg(P \wedge Q \wedge R) \vee P \quad (\neg\neg P \equiv P) \\
\equiv\ & \neg((P \wedge Q) \wedge R) \vee P \quad (\text{ implizite Linksklammerung }) \\
\equiv\ & (\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee P \quad (\text{ DeMorgan }) \\
\equiv\ & ((\neg P \vee \neg Q) \vee \neg R) \vee P \quad (\text{ DeMorgan }) \\
\equiv\ & \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee P \quad (\text{ implizite Linksklammerung })
\end{aligned}$$

5. Die aussagenlogische Formalisierung der Aussage lautet:

$$\neg P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R \tag{3}$$

Das Negat ist dann:

$$
\begin{aligned}
& \neg(\neg P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R) \\
\equiv\ & \neg(\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg R) \quad (A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B) \\
\equiv\ & \neg(P \vee Q \vee \neg R) \quad (\text{ DeMorgan }) \\
\equiv\ & \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad (\text{ DeMorgan })
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.4 (1 + 4 = 5 Punkte)
Die Fibonacci-Zahlen $f_n, n \in \mathbb{N}_0$ sind definiert durch die Gleichungen

$$f_0 = 0 \tag{4}$$

$$f_1 = 1 \tag{5}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ : f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \tag{6}$$

a) Geben Sie die Zahlenwerte von f_2, f_3, f_4 und f_5 an.
b) Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$f_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \tag{7}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich genau, für welche n Induktionsanfang und -voraussetzung gelten müssen, damit Ihr Induktionsschritt funktioniert!

Lösung 3.4
a) $f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5$
b) Der Beweis wird per Induktion über $n \in \mathbb{N}_+$ geführt:

Induktionsanfang Sei $n = 1$, dann gilt

$$f_n = f_1 = 1 \leq \left(\frac{7}{4}\right)^0 = 1\ . \tag{8}$$

genauso gilt für $n = 2$:

$$f_n = f_2 = 1 \leq \left(\frac{7}{4}\right)^1 = \frac{7}{4}\ . \tag{9}$$

Induktionsschritt Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig aber fest.
Es gelte die **Induktionsvoraussetzung**:

$$f_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \textbf{ und } f_{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}$$

Dann gilt:

$$
\begin{align}
f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \quad (\text{ Definition von } f_{n+1}) \tag{10}\\
&\leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \quad (\text{ Induktionsvoraussetzung}) \tag{11}\\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \left(1 + \frac{7}{4}\right) \tag{12}\\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{44}{16} \tag{13}\\
&\leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{49}{16} \tag{14}\\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{2} \tag{15}\\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{n} \tag{16}
\end{align}
$$