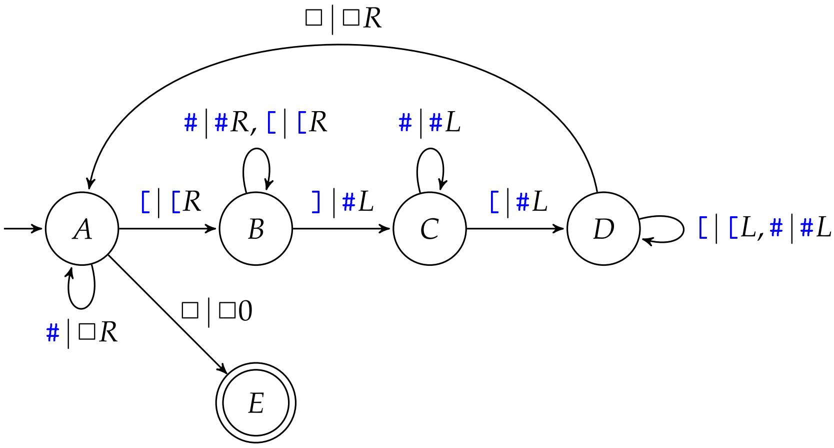
Hinweis. Dieses Aufgabenblatt enthält eine kleine Sammlung an Aufgaben zu den letzten klausurrelevanten Themen der Vorlesung. Die Aufgaben dienen ausschließlich der Vorbereitung für die Klausur. Sie sind keine Bonusaufgaben; Sie können damit *keine* Punkte erwerben, die für den Übungsschein angerechnet werden könnten. Bitte geben Sie keine Lösungen ab. Etwaige Abgaben werden von den Tutoren *nicht* korrigiert.

Die Lösungen zu den folgenden Aufgaben werden wir in einer Woche auf Ilias an der üblichen Stelle veröffentlichen. Sie sollten aber zunächst versuchen, die Aufgaben selbst zu lösen.

Aufgabe 13.1 (0 + 0 = 0 Punkte)
(Aus WS 2018/2019)
Betrachten Sie folgende Turing-Maschine T mit Eingabealphabet $\{$[,]$\}$:



a) Simulieren Sie die ersten 12 Schritte von T für das Eingabewort $w =$ [][]]. Erstellen Sie dazu eine Tabelle wie folgt:

Schritt	Konfiguration
0	A (über dem ersten [) □ [ ] [ ]] □
1	B (über dem ersten]) □ [ ] [ ]] □
⋮	⋮
12	… …

Entscheiden Sie anschließend, ob $w \in L(T)$ gilt oder nicht, und begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor A oder eine kontextfreie Grammatik G an, sodass $L(A) = L(T)$ bzw. $L(G) = L(T)$ ist.

Lösung 13.1

a)

Schritt	Konfiguration
0	$\square\ \overset{A}{\texttt{[}}\ \texttt{]}\ \texttt{[}\ \texttt{]}\ \texttt{]}\ \square$
1	$\square\ \texttt{[}\ \overset{B}{\texttt{]}}\ \texttt{[}\ \texttt{]}\ \texttt{]}\ \square$
2	$\square\ \overset{C}{\texttt{[}}\ \texttt{\#}\ \texttt{[}\ \texttt{]}\ \texttt{]}\ \square$
3	$\overset{D}{\square}\ \texttt{\#}\ \texttt{\#}\ \texttt{[}\ \texttt{]}\ \texttt{]}\ \square$
4	$\square\ \overset{A}{\texttt{\#}}\ \texttt{\#}\ \texttt{[}\ \texttt{]}\ \texttt{]}\ \square$
5	$\square\ \overset{A}{\texttt{\#}}\ \texttt{[}\ \texttt{]}\ \texttt{]}\ \square$
6	$\square\ \overset{A}{\texttt{[}}\ \texttt{]}\ \texttt{]}\ \square$
7	$\square\ \texttt{[}\ \overset{B}{\texttt{]}}\ \texttt{]}\ \square$
8	$\square\ \overset{C}{\texttt{[}}\ \texttt{\#}\ \texttt{]}\ \square$
9	$\overset{D}{\square}\ \texttt{\#}\ \texttt{\#}\ \texttt{]}\ \square$
10	$\square\ \overset{A}{\texttt{\#}}\ \texttt{\#}\ \texttt{]}\ \square$
11	$\square\ \overset{A}{\texttt{\#}}\ \texttt{]}\ \square$
12	$\square\ \overset{A}{\texttt{]}}\ \square$

Es gilt $w \notin L(T)$, da diese letzte Konfiguration (d.h. nach 12 Schritten von T) zwar eine Endkonfiguration ist, A aber kein akzeptierender Zustand ist.

b) $G = (\{S\}, \{\texttt{[}, \texttt{]}\}, S, \{S \to \texttt{[}S\texttt{]} \mid SS \mid \varepsilon\})$
Einen endlichen Akzeptor gibt es nicht.

Aufgabe 13.2 (0 + 0 + 0 = 0 Punkte)
(aus WS 2010/2011)
Zu einer gegebenen Turingmaschine T sei eine Relation $R_T \subseteq C_T \times C_T$ auf der Menge der Konfigurationen C_T von T wie folgt definiert:

$$R_T = \{(c, d) \in C_T \times C_T \mid \exists t \in \mathbb{N}_0 : \Delta_t(c) = d \vee \Delta_t(d) = c\}$$

a) Ist R_T eine Äquivalenzrelation? Geben Sie für jede der drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation an, ob sie für R_T gelten und begründen Sie Ihre Antwort.
b) Erklären Sie, wie man allgemein zu einer Turingmaschine T eine Turingmaschine T' konstruieren kann, die die folgenden Eigenschaften hat:
   - Sie hält für genau die gleichen Eingaben wie T.
   - Am Ende jeder haltenden Berechnung von T' stehen auf dem Band nur Blanksymbole.
   - Wenn T' hält, tut sie das immer im gleichen Zustand H.
c) Erklären Sie, wie Sie das Halteproblem entscheiden könnten, wenn Sie einen Algorithmus hätten, der Ihnen für jede Turingmaschine T und beliebige Konfigurationen c und d von T in endlicher Zeit sagt, ob das Paar (c, d) in R_T liegt.
   Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b).

Lösung 13.2

a) R_T ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.
   - Reflexivität: Sei c eine beliebige Konfiguration von T. Für $t = 0$ gilt $\Delta_t(c) = c$ und damit $(c, c) \in R_T$.
   - Symmetrie: Seien $c, d \in C_T$ beliebig und es gelte $(c, d) \in R_T$. Also gibt es $t \in \mathbb{N}_0$ sodass

     $$\begin{aligned} &\Delta_t(c) = d \vee \Delta_t(d) = c \\ \Leftrightarrow &\Delta_t(d) = c \vee \Delta_t(c) = d \end{aligned}$$

     und damit auch $(d, c) \in R_T$.
   - Transitivität: Sei T eine Turingmaschine mit Bandalphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \Box\}$ und Anfangszustand z_0, die einfach von links nach rechts durchlaufend alle Buchstaben durch $\Box$ ersetzt, ohne ihren Zustand zu ändern.
     Dann gilt: $(\Box z_0\mathtt{aaabbb}\Box, \Box z_0\mathtt{bbb}) \in R_T$ und $(\Box z_0\mathtt{bbbbbb}\Box, \Box z_0\mathtt{bbb}\Box) \in R_T$.
     Wegen Symmetrie ist dann auch $(\Box z_0\mathtt{bbb}\Box, \Box z_0\mathtt{bbbbbb}\Box) \in R_T$,
     aber $(\Box z_0\mathtt{aaabbb}\Box, \Box z_0\mathtt{bbbbbb}\Box) \notin R_T$.
     Damit ist R_T nicht transitiv.

b) Sei $T = (Z, z_0, X, f, g, m)$. Wir konstruieren eine Turingmaschine $T' = (Z', z_0, X', f', g', m')$ mit den gewünschten Eigenschaften wie folgt:
   - Wir fügen neue Zustände L, D (für „Links“ und „Delete“) und H zu Z hinzu.
   - Wir fügen X ein neues Bandsymbol $B \notin X$ (für „Blank“) hinzu.
   - Immer wenn T ein $\Box$ schreibt, schreibt T' ein B. (Damit wird sichergestellt, dass keine Lücken in der Bandbeschriftung auftreten.)
   - Immer wenn T' ein B liest, macht es das Gleiche, wie wenn T im entsprechenden Zustand $z \in Z$ ein $\Box$ lesen würde. (Beachte: Wenn T' in einem Zustand $z \in Z$ ein $\Box$ liest, tut es das gleiche wie T – es sei denn, T würde ein $\Box$ schreiben, dann schreibt T' ein B.)

- Für jedes Paar $(z, x) \in Z \times X$ für das f nicht definiert ist, geht T' in den Zustand L über und gehen ganz nach links (bis zum ersten $\Box$) ohne die Bandbeschriftung zu ändern.
- Dann geht T' in Zustand D über und ganz nach rechts (bis zum ersten $\Box$) gehend werden alle Bandsymbole durch $\Box$ ersetzt.
- Sobald T' in Zustand D auf ein $\Box$ trifft, geht T' in H über, schreibt nichts aufs Band und hält.

c) Sei T eine beliebige Turingmaschine.
Konstruiere T' wie in Teilaufgabe b), die genau dann in der bekannten Endkonfiguration $d = (\Box H \Box)$ hält, wenn T hält.
Sei c die Anfangskonfiguration von T bei Eingabe der Codierung von T. T hält genau dann, wenn es ein $t \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $(c, d) \in R_{T'}$.
Mit dem gegebenen Algorithmus könnte man das in endlicher Zeit feststellen und damit das Halteproblem entscheiden.

Aufgabe 13.3 (0 + 0 = 0 Punkte)
(aus WS 2008/2009)
Gegeben seien die Relationen

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid |x - y| \text{ ist Primzahl } \}$$
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid x \textbf{ div } 10 = y \textbf{ div } 10\} \ .$$

a) Ist R
   - reflexiv?
   - transitiv?
   - symmetrisch?

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

b) Ist S
   - eine Äquivalenzrelation?
   - verträglich mit der Addition?
   - verträglich mit der Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto 2n$?
   - verträglich mit der Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto n \textbf{ div } 2$?

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Lösung 13.3

a) Wir untersuchen die Relation R auf:

   i) Reflexivität: Für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ gilt: $|x - x| = 0$. Da 0 keine Primzahl ist, ist R nicht reflexiv.

   ii) Transitivität: Damit R transitiv ist, muss für alle $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ gelten: $xRy \wedge yRz \to xRz$.
   Betrachte $x = 11, y = 4, z = 2$, dann gilt xRy, da $|11 - 4| = 7$ und yRz, da $|4 - 2| = 2$ Primzahlen sind. Allerdings gilt nicht xRz, denn $|11 - 2| = 9$ ist nicht prim.
   Damit ist R nicht transitiv.

   iii) Symmetrie: Damit R symmetrisch ist, muss für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ gelten: $xRy \to yRx$.
   Seien also $x, y \in \mathbb{N}_0$ beliebig und es gelte xRy. Zu zeigen: Es gilt auch yRx.

Für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$ gilt $|x-y| = |y-x|$. Wenn also $|x-y|$ prim ist, dann auch $|y-x|$ und damit ist R symmetrisch.

b) Wir untersuchen die Relation S.

i) Wir zeigen: S ist eine Äquivalenzrelation.

- Reflexivität: Sei $x \in \mathbb{N}_0$ beliebig.
  Es gilt $x \textbf{ div } 10 = x \textbf{ div } 10$ und damit auch xSx.
  Damit ist S reflexiv.
- Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ beliebig und es gelte xSy und ySz.
  Zu zeigen: Es gilt xSz.
  Da xSy, gilt $x \textbf{ div } 10 = y \textbf{ div } 10$ und da ySz, gilt $y \textbf{ div } 10 = z \textbf{ div } 10$.
  Wegen Transitivität von $=$ gilt dann auch $x \textbf{ div } 10 = y \textbf{ div } 10$.
  Damit ist S transitiv.
- Symmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{N}_0$ beliebig und es gelte xSy.
  Zu zeigen: Es gilt ySx.
  Da xSy gilt, gilt auch $x \textbf{ div } 10 = y \textbf{ div } 10$. Da $=$ symmetrisch ist, folgt auch die Symmetrie von S.

ii) S ist verträglich mit der Addition, wenn gilt:

$$\forall x, x', y, y' \in \mathbb{N}_0 : xSx' \wedge ySy' \rightarrow (x+y)S(x'+y')$$

Wir geben ein Gegenbeispiel an:
Seien $x = 0, x' = 9, y = 0, y' = 1$, dann gilt

$$x \textbf{ div } 10 = 0 \textbf{ div } 10 = 0 = 9 \textbf{ div } 10 = x' \textbf{ div } 10$$

und damit xSx' und

$$y \textbf{ div } 10 = 0 \textbf{ div } 10 = 0 = 1 \textbf{ div } 10 = y' \textbf{ div } 10$$

und damit ySy'. Allerdings ist

$$(x+y) \textbf{ div } 10 = 0 \textbf{ div } 10 = 0 \neq 1 = 10 \textbf{ div } 10 = (x'+y') \textbf{ div } 10$$

und damit ist S nicht verträglich mit der Addition.

iii) S ist verträglich mit $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto 2n$, wenn gilt:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}_0 : xSy \rightarrow f(x)Sf(y)$$

Wir geben ein Gegenbeispiel an:
Seien $x = 3, y = 5$, dann gilt

$$x \textbf{ div } 10 = 3 \textbf{ div } 10 = 0 = 5 \textbf{ div } 10 = y \textbf{ div } 10$$

und damit xSy. Allerdings ist

$$f(x) \textbf{ div } 10 = 6 \textbf{ div } 10 = 0 \neq 1 = 10 \textbf{ div } 10 = f(y) \textbf{ div } 10$$

und damit ist S nicht verträglich mit f

iv) S ist verträglich mit $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto n$ **div** 2, wenn gilt:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}_0 : xSy \to g(x)Sg(y)$$

Wir zeigen: S ist verträglich mit g. Seien $x, y \in \mathbb{N}_0$ beliebig und es gelte xSy. Bezeichne $h = x \textbf{ div } 10 = y \textbf{ div } 10$. Wir können also schreiben

$$\begin{aligned} x &= 10h + x_{10} \\ y &= 10h + y_{10} \end{aligned}$$

für $x_{10}, y_{10} \in \mathbb{Z}_{10}$. Bezeichne außerdem $k = h \textbf{ div } 2$. Damit ist $h = 2k + h_2$ für $h_2 \in \mathbb{Z}_2$. Wir können also schreiben

$$\begin{aligned} x &= 10h + x_{10} = 10(2k + h_2) + x_{10} = 20k + 10h_2 + x_{10} \\ y &= 10h + y_{10} = 10(2k + h_2) + y_{10} = 20k + 10h_2 + y_{10} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= x \textbf{ div } 2 \\ &= (20k + 10h_2 + x_{10}) \textbf{ div } 2 \\ &= 10k + 5h_2 + x_{10} \textbf{ div } 2 \end{aligned}$$

Da $h_2 \in \mathbb{Z}_2$ ist $5h_2 \leq 5$ und da $x_{10} \in \mathbb{Z}_{10}$ ist $x_{10} \textbf{ div } 2 \leq 4$. Also ist $g(x) \textbf{ div } 10 = k$.
Mit derselben Argumentation folgt auch $g(y) \textbf{ div } 10 = k$ und damit ist S verträglich mit g.

Aufgabe 13.4 (0 = 0 Punkte)
Die Relation $R \subseteq M \times M$ sei eine Halbordnung.
Zeigen Sie, dass auch die Relation

$$\hat{R} = \{(y, x) \in M \times M \mid (x, y) \in R\}$$

eine Halbordnung ist.

Lösung 13.4
Sei R eine Halbordnung (also reflexiv, transitiv und antisymmetrisch). Wir müssen zeigen, dass $\hat{R}$ auch reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

- **Reflexivität**: $\forall x \in M : (x, x) \in R \Rightarrow (x, x) \in \hat{R}$
- **Transitivität**: Seien $x, y, z \in M$ beliebig und es gelte $(x, y) \in \hat{R}$ und $(y, z) \in \hat{R}$. Wir müssen zeigen, dass $(x, z) \in \hat{R}$ gilt.

$$\begin{aligned} (x, y) \in \hat{R} \wedge (y, z) \in \hat{R} &\Rightarrow (y, x) \in R \wedge (z, y) \in R \\ &\Rightarrow (z, y) \in R \wedge (y, x) \in R \\ &\Rightarrow (z, x) \in R \\ &\Rightarrow (x, z) \in \hat{R} \end{aligned}$$

- **Antisymmetrie**: Seien $x, y \in M$ beliebig und es gelte $(x, y) \in \hat{R}$ und $(y, x) \in \hat{R}$. Wir müssen zeigen, dass $x = y$ gilt.

$$\begin{aligned}(x, y) \in \hat{R} \wedge (y, x) \in \hat{R} &\Rightarrow (y, x) \in R \wedge (x, y) \in R \\ &\Rightarrow y = x\end{aligned}$$