

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

**INF**  
Erläuterung  
siehe unten

Diese Klausur ist mein  1. Versuch  2. Versuch in GBI

E-Mail-Adr.:
--------------

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
erreichbare Punkte	11	8	10	7	9	7	8
erreichte Punkte							

Gesamtpunktzahl:	
------------------	--

Note:	
-------	--

INF = Klausur-Version mit 6 LP: Studiengang Informatik, Wirtschaftsinformatik, Wirtschaftsingenieurwesen, Bauingenieurwesen, Mathematik, Technomathematik, Lehramt

PH/GEO = Klausur-Version mit 4 LP: Physik, Geodäsie und Geoinformatik

---

## Wichtige Hinweise

- Stellen Sie sicher, dass Sie die richtige Version der Klausur erhalten haben (INF oder PH/GEO auf der Titelseite)!
- Stellen Sie sicher, dass Ihre Klausur 10 Blätter umfasst.
- Lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch!
- Tragen Sie *nach der Einlesezeit* Ihren Vornamen, Nachnamen und Ihre Matrikelnummer auf dem Titelblatt ein! Tragen Sie Ihre Matrikelnummer auch auf jedem Blatt ein!
- Wenn Sie Ihre Antwort nicht direkt bei der Aufgabenstellung aufschreiben, vermerken Sie unbedingt, wo Ihre Lösung steht.
- Sie können die Leerseiten und das angehängte freie Blatt für Antworten nutzen, falls der Platz bei der Aufgabenstellung nicht ausreicht.  
Sie können den Platz auch für Notizen, Skizzen etc. nutzen.  
Kennzeichnen Sie deutlich, welche Angaben bewertet werden sollen!
- Weiteres Leerpapier erhalten Sie bei Bedarf auf Nachfrage von der Aufsicht.
- Bitte bleiben Sie bis zum Ende der Bearbeitungszeit am Platz.
- Aufsichtspersonen können nur organisatorische und keine inhaltlichen Fragen beantworten.

**Aufgabe 1: Allgemeine Fragen (1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11 Punkte)**

/ 11

## a) Binäre Operationen

- 1) Sei  $P$  eine beliebige nicht-leere Menge, und  $\bullet : P \times P \rightarrow P$  eine infix notierte binäre Operation. Geben Sie formale Definitionen für die beiden folgenden Aussagen an:

/1

i. Die Operation  $\bullet$  ist kommutativ.

ii. Die Operation  $\bullet$  ist assoziativ.

- 2) Wir betrachten die infix notierte binäre Operation

/2

$$\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass  $\star$  assoziativ ist.

- 3) Für Mengen  $A$  und  $B$  sei nun  $f : A \rightarrow B$  eine bijektive Funktion, sowie  $\diamond : A \times A \rightarrow A$ ,  $\square : B \times B \rightarrow B$  infix notierte binäre Operationen. Es gelte

/2

$$f(x \diamond y) = f(x) \square f(y)$$

und  $\square$  sei kommutativ. Zeigen oder widerlegen Sie, dass  $\diamond$  kommutativ sein muss.

---

b) Für  $k \in \mathbb{N}_+$  ist  $f_k : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gegeben durch

$$f_k(n) = \sum_{j=1}^n j^k .$$

/2

1) Zeigen Sie:  $f_k(n) \in O(n^{k+1})$ .

/2

2) Zeigen Sie:  $f_k(n) \in \Omega(n^{k+1})$ .

Es genügt, die Aussage für gerade  $n \in \mathbb{N}_0$  zu zeigen.

/2

3) Widerlegen Sie: Für alle  $a, b \in \mathbb{R}_+$  gilt  $n^a \in O(b^n)$



- 
- e) Sei nun im Folgenden  $P$  ein einstelliges Relationssymbol. Es sei das Universum  $U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  gegeben. Geben Sie zwei verschiedene Belegungen  $J_1(P)$  und  $J_2(P)$  des Prädikatensymbols  $P$  an, so dass  $(U, J_1)$  und  $(U, J_2)$  Modelle der Formel

$$\forall z((\exists x P(x)) \rightarrow P(z))$$

sind.

$J_1(P) =$

$J_2(P) =$

**Aufgabe 3: Zahldarstellungen und Sprachen (1 + 1 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte)**

/ 10

Zur Erinnerung: Sei  $Z_2 = \{0, 1\}$ . Die Funktion  $\text{Num}_2 : Z_2^* \rightarrow \mathbb{N}_0$  wurde in der Vorlesung induktiv definiert als

$$\text{Num}_2(w1) = 2 \cdot \text{Num}_2(w) + 1$$

$$\text{Num}_2(w0) = 2 \cdot \text{Num}_2(w)$$

$$\text{Num}_2(\varepsilon) = 0$$

- a) Geben Sie eine Bedingung an  $n \in \mathbb{N}_0$  an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass  $2n + 1$  durch 5 teilbar ist.

/1

- b) Sei  $w \in Z_2^*$ . Geben Sie eine Bedingung an  $\text{Num}_2(w)$  an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass  $\text{Num}_2(w0) \bmod 5 = 3$  ist.

/1

- c) Geben Sie einen endlichen Akzeptor  $A$  über dem Alphabet  $Z_2$  an, der die Sprache

/3

$$L(A) = \{w \in Z_2^* \mid w \text{ ist das leere Wort oder } \text{Num}_2(w) \text{ ist durch 5 teilbar}\}$$

akzeptiert. Der Automat soll genau fünf Zustände besitzen.

*Hinweis:* Erinnern Sie sich an das Konzept der Äquivalenzklassen für den Rest bei der Division durch 5 und nutzen Sie die Erkenntnisse aus a) und b).

---

/2

d) Betrachtet wird die Grammatik  $G = (\{S, T\}, \{a, b, c\}, S, P)$  mit

$$P = \{S \rightarrow ab \mid b \mid T, \quad T \rightarrow aSS\} .$$

Geben Sie eine Ableitung für das Wort  $w = ababab$  in  $G$  an.

/3

e) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik über dem Alphabet  $A = \{a, b\}$  an für die Sprache

$$L = \{w \in A^* \mid N_a(w) = N_b(w)\} .$$

Die Grammatik soll höchstens drei Nichtterminalsymbole besitzen.  
(Sie müssen **keine** Begründung dafür angeben, warum die Grammatik die gesuchte Eigenschaft besitzt.)

**Aufgabe 4: Vollständige Induktion (1 + 5 + 1 = 7 Punkte)**

/ 7

Gegeben ist ein beliebiges Alphabet  $A$ , das die Symbole  $a$  und  $b$  enthält. Sie können in Ihrer Lösung „Kantorowitsch-Baum“ als „K-Baum“ abkürzen. Sie können die Notation  $h(r) \in \mathbb{N}_0$  für „die Höhe des Kantorowitsch-Baumes des regulären Ausdrucks  $r$ “ verwenden.

**Behauptung 1:** Für jeden regulären Ausdruck  $R$  über  $A$ , der keinen Kleene-Stern  $*$  enthält, ist die beschriebene Sprache  $L(R)$  eine endliche Menge.

- a) Zeichnen Sie den Kantorowitsch-Baum für den regulären Ausdruck  $(a|\emptyset)(ba)$ .

/1

- b) Beweisen Sie Behauptung 1 mit (starker) vollständiger Induktion über der Höhe von Kantorowitsch-Bäumen von regulären Ausdrücken **oder** mit struktureller Induktion über reguläre Ausdrücke.

/5

---

/1

c) Die umgekehrte Aussage in Behauptung 2 gilt nicht.

**Behauptung 2:** Für jeden regulären Ausdruck  $R$  über  $A$ , der den Kleene-Stern  $*$  enthält, ist die beschriebene Sprache  $L(R)$  eine unendliche Menge.

Geben Sie als Gegenbeispiel einen regulären Ausdruck an, der  $*$  enthält und doch eine endliche Sprache beschreibt.

**Aufgabe 5: Codierungen (1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 1 = 9 Punkte)**

/ 9

Seien  $f^{**}, g^{**} : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$   $\varepsilon$ -freie Homomorphismen induziert durch die Funktionen  $f, g : \{a, b, c\} \rightarrow \{0, 1\}^*$ . Dabei sei  $f$  gegeben durch

$x$	$a$	$b$	$c$
$f(x)$	001	10	1

und es gelte

$$f^{**}(abc) = g^{**}(acb) \quad (1)$$

$$f^{**}(ccac) = g^{**}(cac) \quad (2)$$

a) Geben Sie  $f^{**}(abc)$  und  $f^{**}(ccac)$  an.

/1

$$f^{**}(abc) = \underline{\hspace{10em}}$$

$$f^{**}(ccac) = \underline{\hspace{10em}}$$

b) Welche Werte kann  $g(a)$  annehmen, damit (1) eine Lösung hat?

/1

c) Welche Werte kann  $g(a)$  annehmen, damit (2) eine Lösung hat?

/1

d) Geben Sie  $g^{**}(abc)$  an.

/1

- e) Die Funktion  $f^{**}$  ist eine Codierung, d.h., es gibt eine Umkehrfunktion  $h : \{0, 1\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$  mit  $h \circ f^{**} = \text{id}_{\{a, b, c\}^*}$ .

Da  $f$  nicht präfixfrei ist, muss ein Wort  $v \in \{a, b, c\}^*$ , dessen Codewort  $w = f^{**}(v)$  mit 1 beginnt, nicht notwendigerweise mit  $c$  beginnen. Wenn das Codewort  $w$  aber mit 11 beginnt, muss das erste Symbol von  $v$  ein  $c$  sein.

Geben Sie vier induktive Bedingungen an, die für  $h$  gelten müssen und vervollständigen Sie dazu die folgenden Zeilen. Die erste Zeile zeigt die induktive Bedingung für die Aussage des letzten Absatzes:

- $h(11w) = c \cdot h(1w)$  für alle  $w \in \{0, 1\}^*$
- $h(\underline{\quad}w) = \underline{\quad} \cdot h(\underline{\quad}w)$  für alle  $w \in \{0, 1\}^*$
- $h(\underline{\quad}w) = \underline{\quad} \cdot h(\underline{\quad}w)$  für alle  $w \in \{0, 1\}^*$
- $h(\underline{\quad}w) = \underline{\quad} \cdot h(\underline{\quad}w)$  für alle  $w \in \{0, 1\}^*$
- $h(\underline{\quad}w) = \underline{\quad} \cdot h(\underline{\quad}w)$  für alle  $w \in \{0, 1\}^*$

Damit Sie nicht umblättern müssen hier noch einmal die Definition der Funktion  $f$ :

$x$	$a$	$b$	$c$
$f(x)$	001	10	1

- f) Geben Sie ein Wort  $w_f \in \{0, 1\}^*$  an, für das es mehr als einen möglichen Wert als Funktionswert  $h(w_f)$  gibt (und  $h$  doch Umkehrfunktion von  $f^{**}$  bleibt).

Warum gibt es solche Wörter  $w_f$ ?

**Aufgabe 6: Graphen (1 + 1 + 2 + 3 = 7 Punkte)**

/ 7

Jede Relation  $R$  über einer endlichen Menge  $M$  mit  $|M| = n$  kann als gerichteter Graph  $G = (M, R)$  interpretiert werden, in dem eine Kante von einem Element  $a \in M$  zu einem Element  $b \in M$  genau dann existiert, wenn  $(a, b) \in R$ .

a) Zeichnen Sie den Graphen  $G_a = (\{1, 2, 3\}, \leq)$ .

/1

b) Sei nun  $A$  die Adjazenzmatrix von  $G = (M, R)$ . Welche Eigenschaft gilt für die Einträge  $a_{ij}$  (für  $1 \leq i, j \leq n$ ) der Matrix  $A$ , wenn ...

/1

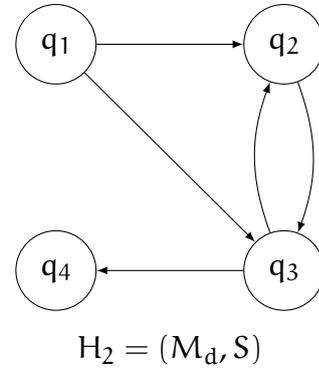
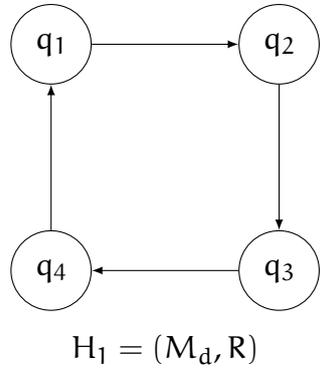
1) ... die Relation  $R$  reflexiv ist?

2) ... die Relation  $R$  symmetrisch ist?

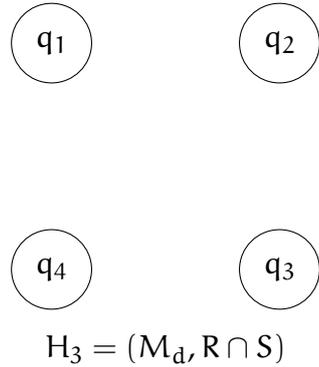
c) Wie viele Relationen, die sowohl reflexiv als auch symmetrisch sind, gibt es über  $M$  (für  $|M| = n$ )? Begründen Sie.

/2

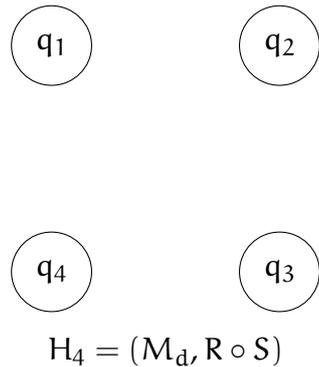
d) Für diese Teilaufgabe ist die Menge  $M_d = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$  festgelegt. Für die beiden Graphen  $H_1 = (M_d, R)$  und  $H_2 = (M_d, S)$  sind die binäre Relationen  $R, S \subseteq M_d^2$  durch die folgenden Darstellungen festgelegt:



1) Ergänzen Sie den folgenden Graphen zu  $H_3 = (M_d, R \cap S)$ :



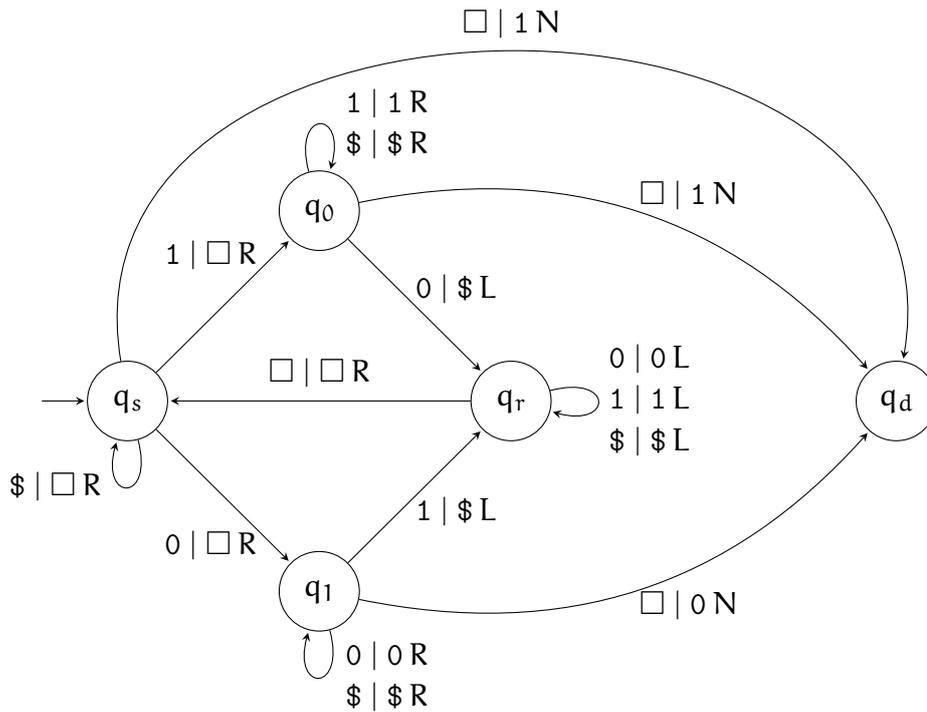
2) Ergänzen Sie den folgenden Graphen zu  $H_4 = (M_d, R \circ S)$ :



**Aufgabe 7: Turingmaschinen (2 + 4 + 2 = 8 Punkte)**

/ 8

Betrachten Sie die folgende Turingmaschine  $\mathcal{M}$  mit Eingabealphabet  $A = \{0, 1\}$  und Bandalphabet  $B = \{0, 1, \$, \square\}$ .  $\square$  ist das Blankensymbol. Bei den Bewegungen des Lesekopfs steht L für „links“, R für „rechts“ und N für „nicht bewegen“.



**Raster für Teilaufgabe a):**

...	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	0	1	0	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	...
...	<input type="checkbox"/>								<input type="checkbox"/>	...
...	<input type="checkbox"/>								<input type="checkbox"/>	...
...	<input type="checkbox"/>								<input type="checkbox"/>	...
...	<input type="checkbox"/>								<input type="checkbox"/>	...
...	<input type="checkbox"/>								<input type="checkbox"/>	...
...	<input type="checkbox"/>								<input type="checkbox"/>	...
...	<input type="checkbox"/>								<input type="checkbox"/>	...
...	<input type="checkbox"/>								<input type="checkbox"/>	...
...	<input type="checkbox"/>								<input type="checkbox"/>	...
...	<input type="checkbox"/>								<input type="checkbox"/>	...

/2

a) Führen Sie  $\mathcal{M}$  für die Eingabe  $w = 10101$  aus und geben Sie jeweils das Arbeitsband an,

- wenn  $\mathcal{M}$  von  $q_r$  in den Zustand  $q_s$  übergegangen ist, und
- nachdem  $\mathcal{M}$  gehalten hat (Endkonfiguration).

Markieren Sie jeweils die Position des Lesekopfs durch Einkreisen der Stelle auf dem Band.

Nutzen Sie dazu das Raster auf der vorherigen Seite. (Es werden nicht alle Zeilen des Rasters benötigt.)

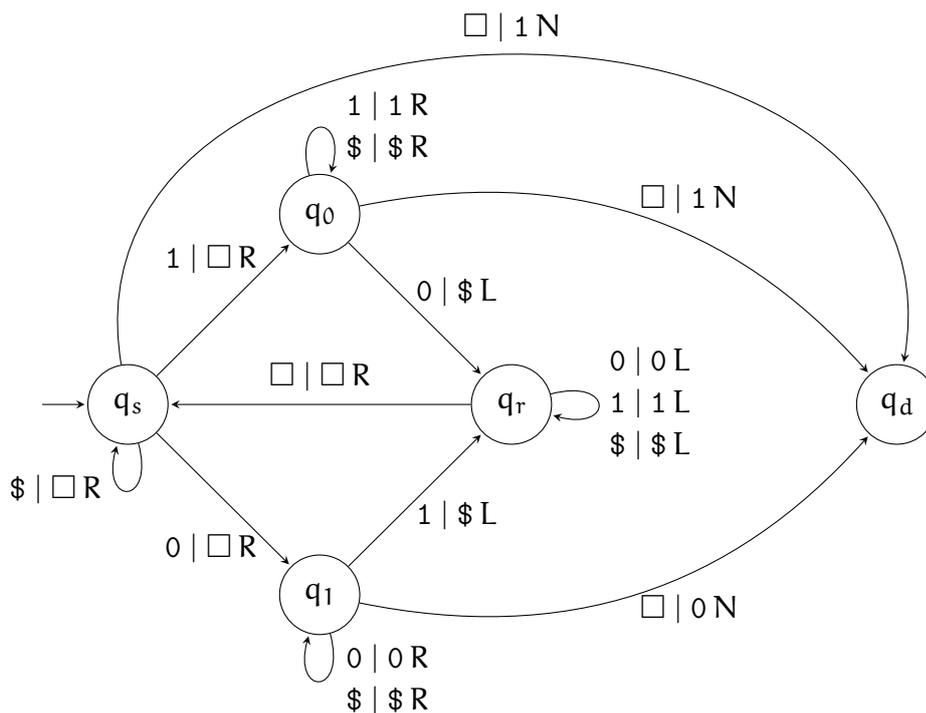
/4

b)  $\mathcal{M}$  ist eine Turingmaschine ohne akzeptierende Zustände, die aber ein Ergebnis auf dem Band ablegt.

Konstruieren Sie ausgehend von  $\mathcal{M}$  eine Turingmaschine  $\mathcal{N}$  mit akzeptierenden Zuständen, sodass  $\mathcal{N}$  ein Wort  $w \in A^*$  genau dann akzeptiert, wenn  $\mathcal{M}$  für die Eingabe  $w$  hält und der Kopf in der Endkonfiguration auf ein mit 1 beschriftetes Feld zeigt.

Modifizieren Sie hierzu die unten abgedruckte Kopie von  $\mathcal{M}$ . Sie können

- bis zu 2 neue Zustände hinzufügen,
- Zustandsübergänge wegstreichen,
- neue Zustandsübergänge hinzufügen, und
- Zustände zu akzeptierenden Zuständen machen.

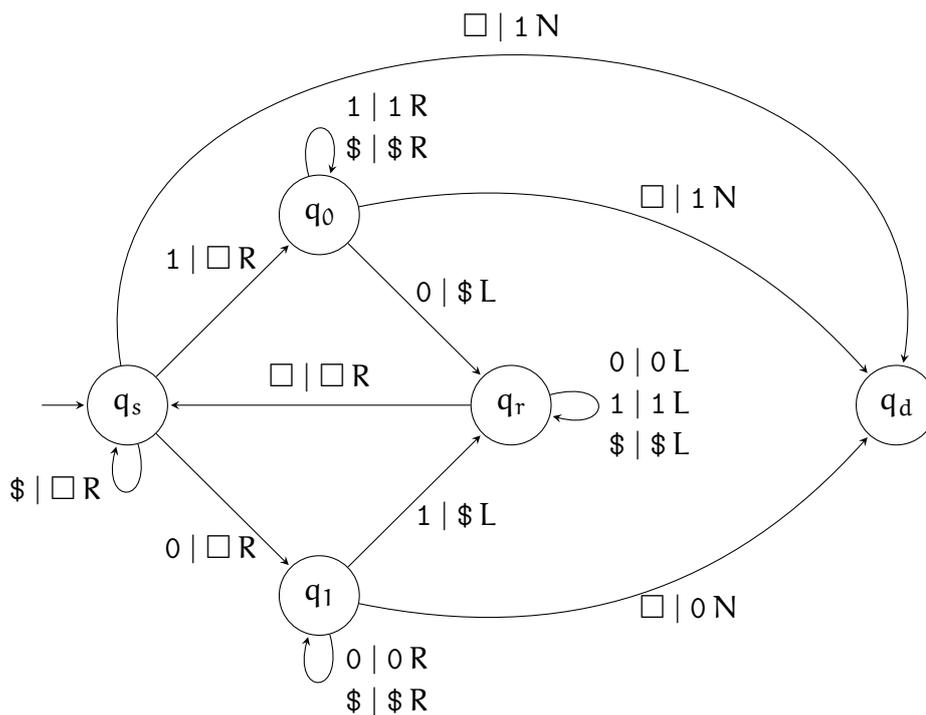


- c) Geben Sie die durch  $\mathcal{N}$  akzeptierte Sprache  $\mathcal{L}(\mathcal{N})$  in Mengenschreibweise an.

/2

Sie können auch die nachfolgend abgedruckte Kopie von  $\mathcal{M}$  verwenden, um Ihre Lösung für Teilaufgabe b) anzugeben.

Wenn Sie beide Skizzen verwenden, kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Lösung gewertet werden soll!



---

*Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.  
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!*

Matrikelnr:

---

*Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.  
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!*

---

*Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.  
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!*