Karlsruher Institut für Technologie
Institute of Information Security and Dependability
Dr. Mattias Ulbrich
https://formal.kastel.kit.edu/

Übungsblatt 1

Grundbegriffe der Informatik — Winter 2023/24

Tutor*in:		Tutorium Nr.:	
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 2:		,	
Matr.nr. 2:			

Ausgabe: 31. Oktober 2023, 14:30 Uhr

Abgabe: 10. November 2023, 12:30 Uhr

Bitte beachten Sie die Hinweise auf der letzten Seite.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:*

Blatt 1:	/ 20	Blätter 1 – 1, Stud. 1:	/ 20
		Blätter 1 – 1, Stud. 2:	/ 20

Aufgabe 1 - Diffizile Differenz (7 Punkte)

Gegeben seien drei beliebige Mengen A, B, C mit $A, B \subseteq C$.

1. Zeigen Sie, dass $A \setminus (A \setminus B) \subseteq B$. (1 Punkt)
2. Was muss für A, B gelten, damit $A \setminus (A \setminus B) = B$ gilt? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (1 Punkt)
3. Zeigen Sie, dass $A \setminus B = A \cap (C \setminus B)$. (2 Punkte)
4. Zeigen Sie die folgende Mengengleichheit: (3 Punkte)

   $$C \setminus ((A \cap B) \cup (C \setminus B)) = B \cap (C \setminus A)$$

   Hinweis: Verwenden Sie Ihre Teilergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben!

Lösung 1

1. Sei $a \in A \setminus (A \setminus B)$. Nach der Definition der Mengendifferenz ist $a \in A$ und $a \notin (A \setminus B) = \{x \in A \mid x \notin B\}$. Also ist nicht $a \notin B$, d.h. $a \in B$.
2. B muss eine Teilmenge von A sein, denn: $A \setminus (A \setminus B)$ ist eine Teilmenge von A. Ist B keine Teilmenge von A, so enthält B mindestens ein Element $b \notin A$ und damit $b \notin A \setminus (A \setminus B)$. Damit kann hier keine Gleichheit gelten.
3. Um Mengengleichheit zu zeigen, müssen wir zwei Teilmengenbeziehungen zeigen:

   „$\subseteq$“ Sei $a \in A \setminus B$, d.h. $a \in \{x \in A \mid x \notin B\}$. Dann ist $a \in A$ und $a \notin B$. Da A eine Teilmenge von C ist, folgt aus $a \in A$ auch $a \in C$. Mit $a \notin B$ folgt $a \in C \setminus B$. Insgesamt gilt also $a \in A \cap (C \setminus B)$.

   „$\supseteq$“ Sei $a \in A \cap (C \setminus B)$, d.h. $a \in A$ und $a \in \{x \in C \mid x \notin B\}$. Dann ist $a \in A$ und $a \notin B$. Nach Definition der Mengendifferenz ist also $a \in A \setminus B$.
4. Auch hier zeigen wir beide Teilmengenbeziehungen:

   „$\subseteq$“ Sei $c \in C \setminus ((A \cap B) \cup (C \setminus B))$. Dann gilt:
   - Es ist $c \in C$ und $c \notin ((A \cap B) \cup (C \setminus B))$.
   - Also ist c weder in $A \cap B$ noch in $C \setminus B$.
   - Damit ist auch $c \in (C \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (C \setminus B))$.

- Nach Teilaufgabe 1 gilt $C \setminus (C \setminus B) \subseteq B$ und da B Teilmenge von C ist gilt nach Teilaufgabe 2 sogar Gleichheit. Also ist $c \in B$.
- Da $c \in B$ und $c \notin (A \cap B)$ muss $c \notin A$ sein. Mit $c \in C$ folgt $c \in (C \setminus A)$.
- Aus $c \in B$ und $c \in (C \setminus A)$ folgt $c \in B \cap (C \setminus A)$.

„$\supseteq$" Sei $c \in B \cap (C \setminus A)$. Dann gilt:

- Es ist $c \in B$ und $c \in \{x \in C \mid x \notin A\}$.
- Also ist $c \in C$ und $c \in B$, aber $c \notin A$.
- Da $c \notin A$, gilt insbesondere $c \notin (A \cap B) \subseteq A$.
- Da $c \in B$ und $B \subseteq C$, muss $c \notin (C \setminus B)$ sein.
- Daraus folgt mit $c \in C$, dass $c \in C \setminus ((A \cap B) \cup (C \setminus B))$.

Aufgabe 2 - What's in a set? (3 Punkte)

Wir nennen einen Klassenterm *nicht-ausschließend*, wenn er von der Form

$$\{x \mid P(x)\}$$

ist[1]. In der Vorlesung wurde in diesem Kontext eine Warnung ausgesprochen:

> Vorsicht: nur „harmlose" Aussagen P nutzen

Bertrand Russell hat um 1900 ein Problem der Mengenlehre mit allgemeinen Klassentermen herausgefunden, das nach ihm *Russells Antinomie* benannt ist. Machen Sie dazu eine Internet-Recherche und finden Sie heraus, worum es dabei geht. Was bedeutet sie für die Verwendung von nicht-ausschließenden Klassentermen? Fassen Sie das Ergebnis Ihrer Recherche in eigene Worte und schreiben Sie dabei nicht mehr als vier Sätze!

Lösung 2

Die Russellsche Antinomie ist ein bekanntes Paradox in der Mengenlehre, basierend auf dem Klassenterm $R = \{X \mid X \notin X\}$. Sowohl die Annahme $R \in R$ als auch $R \notin R$ führen zu einem Widerspruch. Russells eigene Antwort auf diesen Widerspruch war die Verwendung von Typen, um zu erzwingen, dass Mengen stets einen anderen Typ haben als alle ihre Elemente und somit von vornherein die obige Definition

[1] Ein Klassenterm der Form $\{x \in A \mid P(x)\}$ heißt ausschließend (oder aussondernd), weil hier Elemente aus der Menge A ausgeschlossen bzw. ausgesondert werden. Diese Obermenge A gibt es beim nicht-ausschließenden Klassenterm nicht.

ungültig zu machen. Ohne diese Typisierung muss darauf geachtet werden, keine zirkulären Abhängigkeiten zwischen einer Menge selbst und der Definition ihrer Elemente zu erzeugen.

Aufgabe 3 - Unerwartete Falschaussagen (4 Punkte)

Um eine Aussage zu widerlegen, genügt es, ein Gegenbeispiel anzugeben. So kann zum Beispiel die Aussage „Alle Primzahlen sind ungerade", durch das Gegenbeispiel 2 widerlegt werden, denn 2 ist eine Primzahl, jedoch gerade.

Die folgenden Aussagen sind allesamt **falsch**. Geben Sie, um dies zu zeigen, jeweils ein Gegenbeispiel an.

1. Für beliebige Mengen A, B, C gilt $(A \cap B) \cup C \subseteq A \cap (B \cup C)$.
2. Seien A, B, C, D beliebige Mengen. Dann folgt aus $A \cup B = C \cup D$, dass auch $\{A, B\} = \{C, D\}$ gelten muss.
3. Für beliebige endliche Mengen A, B gilt, dass $|(A \times B) \cup A| = |A \times B| + |A|$.
4. Für beliebige Mengen A_1, A_2, B gilt, dass wenn $A_1 \times B = A_2 \times B$ gilt, A_1 und A_2 dieselbe Menge sein müssen ($A_1 = A_2$).

Lösung 3

Für alle Teilaufgaben gibt es mehrere mögliche Lösungen, beispielsweise:

1. $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\} \, C = \{2, 3\}$
   Begründung (nicht gefordert):
   $$(A \cap B) \cup C = \{1\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} \not\subseteq \{1, 2\} = \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = A \cap (B \cup C)$$
2. $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{1, 2\}, D = \emptyset$
   Begründung (nicht gefordert): Es ist
   $$A \cup B = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} = \{1, 2\} \cup \emptyset = C \cup D$$
   aber $\{\{1\}, \{2\}\} \neq \{\{1, 2\}, \emptyset\}$.
3. $A = \{1, (1, 1)\}$ und $B = \{1\}$
   Begründung (nicht gefordert): Der Schnitt von $A \times B$ und A ist nicht leer, denn $A \times B = \{(1, 1), ((1, 1), 1)\}$.
4. $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, B = \emptyset$
   Begründung (nicht gefordert): Es ist $A_1 \times B = \emptyset = A_2 \times B$, aber A_1 und A_2 sind nicht gleich.

Aufgabe 4 - Sockensortierer (6 Punkte)

In der (natürlich unsortierten) Sockenschublade liegen rote und blaue Socken. Da es nun morgens noch recht dunkel ist, kann es passieren, dass beim Anziehen zwei nicht zusammenpassende Socken aus der Schublade gezogen werden. Doch was hat das mit Mengenoperationen zu tun?
Im Folgenden bezeichnen wir die Menge der blauen Socken mit B, die Menge der roten Socken mit R und die Anzahl aller möglichen ungleichen Sockenpaare mit m. Beachten Sie: Unter einem Sockenpaar verstehen wir in dieser Aufgabe eine Menge von Socken mit genau 2 Elementen.[2]

1. Beschreiben Sie den Zusammenhang von m mit B und R mit Hilfe einer Gleichung. Verwenden Sie dazu die Mengenoperationen, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben. (1 Punkt)

2. Geben Sie einen Term an, der die Menge aller möglichen Sockenpaare beschreibt. (2 Punkte)

3. Wie viele mögliche Sockenpaare lassen sich insgesamt bilden? Geben Sie eine von $b = |B|$ und $r = |R|$ abhängige Formel an und begründen Sie kurz, warum Ihre Formel korrekt ist. (3 Punkte)

Lösung 4

1. Es gilt $m = |(B \times R)|$.

2. Gesucht ist die Menge aller Sockenmengen der Kardinalität 2. Diese lässt sich beschreiben durch $P = \{S \subseteq B \cup R \mid |S| = 2\}$

3. Um $|P|$ zu bestimmen, teilen wir P zunächst auf in die Menge P_u der ungleichen Sockenpaare und die Menge P_g der gleichen Sockenpaare. Diese beiden Mengen sind disjunkt, also gilt $|P| = |P_u| + |P_g|$.
   Nach Teilaufgabe 1 ist $|P_u| = m = |B \times R| = b \cdot r$. Um die Anzahl aller gleichen blauen Socken zu bestimmen, gehen wir von $B \times B$ aus. Diese Menge enthält auch Tupel, die zwei Mal die gleiche Socke enthalten und damit keine gültigen Sockenpaare sind. Zudem ist jedes blaue Sockenpaar $\{s_1, s_2\}$ doppelt repräsentiert, als (s_1, s_2) und als (s_2, s_1). Insgesamt gibt es also $\frac{1}{2}|B \times B \setminus \{(s, s) \mid s \in B\}| = \frac{1}{2}(b^2 - b)$ blaue Sockenpaare und analog $\frac{1}{2}(r^2 - r)$ rote Sockenpaare.

[2] Wir gehen also davon aus, dass es egal ist, welche Socke am linken und welche am rechten Fuß angezogen wird.

Damit gilt $|P_g| = \frac{1}{2}(b^2 + r^2 - b - r)$. Die Anzahl aller möglichen Sockenpaare ist also

$$|P| = |P_u| + |P_g| = b \cdot r + \frac{1}{2}(b^2 + r^2 - b - r)$$

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- Handschriftlich erstellt sind
- Diese Seite als Deckblatt besitzen
- **Rechtzeitig** abgegeben werden

Wenn Sie Ihre Ausarbeitung im Keller abgeben, beachten Sie:

- Abgabe muss in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet werden
- Tablet-Ausdrucke sind zulässig

Wenn Sie Ihre Ausarbeitung online über ILIAS abgeben, dann achten Sie darauf:

- Abgabe muss **genau eine** PDF-Datei sein
- Scans und lesbare Fotos sind zulässig
- Abgabe erfolgt unter „Tutorien“ im Ordner **Ihres** Tutoriums