

Übungsblatt 2

Grundbegriffe der Informatik — Winter 2023/24

Tutor*in: Tutorium Nr.:

Nach-, Vorname 1: ,

Matr.nr. 1:

Nach-, Vorname 2: ,

Matr.nr. 2:

Ausgabe: 7. November 2023, 14:30 Uhr

Abgabe: 17. November 2023, 12:30 Uhr

Bitte beachten Sie die Hinweise auf der letzten Seite.

*Von Tutor*in auszufüllen:*

Blatt 2: / 20.5

Blätter 1 – 2, Stud. 1: / 40.5

Blätter 1 – 2, Stud. 2: / 40.5

Aufgabe 1 - Dysfunktionale Relationen (6 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie für jede der folgenden Relationen, dass sie als Teilmenge des gegebenen kartesischen Produkts eine Funktion ist.

a) $A = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\} \subseteq \{1, 2, 3\} \times \mathbb{N}$ (1 Punkt)

b) $B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\} \subseteq \mathbb{N}^2$ (1 Punkt)

c) $C = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n = m^2\} \subseteq \mathbb{N}^2$ (1 Punkt)

d) $D = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n < m\} \subseteq \mathbb{N}^2$ (1 Punkt)

e) $E = \{(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid m \in p \text{ genau dann wenn } m \text{ teilt } n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$
(2 Punkte)

Aufgabe 2 - Dr. Meta auf der Flucht (4.5 Punkte)

Der ebenso hinterhältige wie geniale Superbösewicht Dr. Meta verfolgt unermüdlich das Ziel, die Weltherrschaft an sich zu reißen. Bisher wurde er glücklicherweise stets von einer ungewöhnlichen Allianz gewiefter Studierenden des KIT, der Geheimbrigade der Informatik (GBI) aufgehalten.

Nun hat Dr. Meta die Aufmerksamkeit der GBI auf sich gezogen: Er wurde wiederholt dabei beobachtet, wie er verdächtig viele Kartons mit undefinierbarem Inhalt in Richtung Campus transportiert hat. Doch bevor die GBI seinen Standort genau bestimmen konnte, ist Dr. Meta getürmt. Die GBI nimmt die Verfolgung auf.

Das Gebiet, das durchsucht werden soll, teilt sie dazu in eine Menge von Koordinaten $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 42 \text{ und } 0 \leq y \leq 30\}$ auf. Die Agenten der GBI gehen systematisch vor und rücken in jedem Schritt **entweder** eine Koordinate in positive x -Richtung **oder** eine Koordinate in positive y -Richtung vor.

Nun sind Sie gefragt: Helfen Sie der GBI, den Schurken ausfindig zu machen!

- a) Definieren Sie die Relation $\text{step} \subseteq S \times S$ aller Schritte, indem Sie einen Klassenterm angeben. Ein Schritt von Koordinate (x, y) zu Koordinate (x', y') soll dabei als Tupel $((x, y), (x', y'))$, dargestellt werden. (1 Punkt)

Sei nun die Funktion $\hat{\text{H}}: S \rightarrow \{\square, \blacksquare\}$ gegeben. Es ist $\hat{\text{H}}((x, y)) = \blacksquare$ genau dann, wenn an Koordinate (x, y) ein Hindernis, wie z. B. ein Gebäude, steht und damit (x, y) nicht betreten werden kann. Für alle anderen $(x', y') \in S$ gilt $\hat{\text{H}}((x', y')) = \square$.

- b) Geben Sie die Menge der Koordinaten an, an denen sich ein Hindernis befindet. (0.5 Punkte)

- c) Geben Sie die Relation $\text{step}_{\blacktriangle} \subseteq S \times S$ aller gültigen Schritte als Mengenausdruck an. Verwenden Sie keine Klassentermschreibweise. Ein Schritt ist gültig, wenn weder sein Start- noch sein Zielcoordinate ein Hindernis enthalten. (1 Punkt)

Dr. Meta wurde an Koordinate $(42, 30)$ gesichtet! Doch welche Agenten können überhaupt zu ihm gelangen? Um zu verhindern, dass er ihnen entwischt, rücken die Agenten weiterhin nur in gültigen Schritten vor, also solchen, die in $\text{step}_{\blacktriangle}$ enthalten sind.

- d) Definieren Sie die Funktion $\text{path}: S \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$, die eine Koordinate (x, y) genau dann auf **true** abbildet, wenn $(42, 30)$ von (x, y) aus über gültige Schritte erreicht werden kann. (2 Punkte)

Aufgabe 3 - Zettelwirtschaft (6 Punkte)

Nun, da der Fall Dr. Meta wieder aufgerollt wird, beschließt die GBI, ihr Wissen über den brillanten Bösewicht zusammenzutragen. Nur leider ist dieses Wissen über viele Akten verstreut.

Sei \mathcal{A} die Menge der Akten zum Fall Dr. Meta und sei G die Menge aller Agenten der GBI. Weder \mathcal{A} noch G sind leer. Für jede Gruppe von Agenten $X \in \mathcal{P}(G)$ beschreibt die partielle Funktion $\text{intel}_X: \mathcal{A} \dashrightarrow \mathbb{N}_+$, wie viel die Agenten aus X wissen: Haben sie in einer Akte $a \in \mathcal{A}$ mindestens einen Eintrag geschrieben, dann ist $\text{intel}_X(a)$ die Anzahl der Einträge von X in a .

Leider ist das nur eine partielle Funktion, d. h. sie ist nicht für alle, sondern nur für manche **Akten** bekannt. Um festzustellen, wie viel mehrere Agenten zusammen wissen, kombinieren wir die ihnen zugeordneten partiellen Funktionen. Dazu definieren wir Folgendes. Dabei ist die *Domäne* einer partiellen Funktion $f: A \dashrightarrow B$, geschrieben $\text{Dom}(f)$, die Menge aller Werte im Definitionsbereich, auf denen f definiert ist; formal: $\text{Dom}(f) = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in f\}$.

Für disjunkte Agentengruppen $X, Y \in \mathcal{P}(G)$ gelte:

$\text{intel}_X \oplus \text{intel}_Y:$

$\mathcal{A} \dashrightarrow \mathbb{N}_+$

$$a \mapsto \begin{cases} \text{intel}_X(a) + \text{intel}_Y(a) & | a \in \text{Dom}(\text{intel}_X) \cap \text{Dom}(\text{intel}_Y) \\ \text{intel}_X(a) & | a \in \text{Dom}(\text{intel}_X) \setminus \text{Dom}(\text{intel}_Y) \\ \text{intel}_Y(a) & | a \in \text{Dom}(\text{intel}_Y) \setminus \text{Dom}(\text{intel}_X) \end{cases}$$

- a) Die Agenten Alice und Bob haben sich mit den gleichen Akten $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ beschäftigt. Für $A = \{\text{Alice}\}$ und $B = \{\text{Bob}\}$ ist

$$\text{intel}_A(a) = \begin{cases} 3 & | a = a_1 \\ 5 & | a = a_3 \end{cases} \quad \text{intel}_B(a) = \begin{cases} 1 & | a = a_1 \\ 9 & | a = a_2 \end{cases}$$

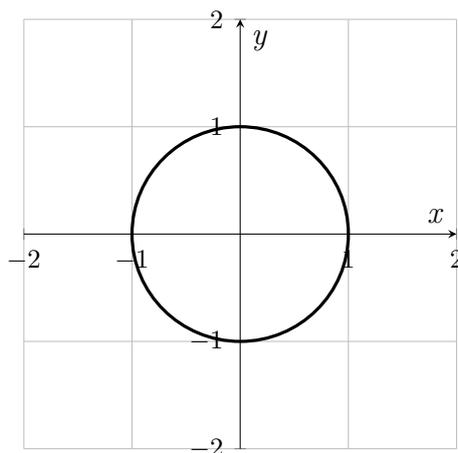
Geben Sie $\text{intel}_A \oplus \text{intel}_B$ an. (0.5 Punkte)

- b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass für $\text{intel}_X \oplus \text{intel}_Y$ für alle **disjunkten** $X, Y \in \mathcal{P}(G)$ wieder eine partielle Funktion ist. (1 Punkt)
- c) Was weiß eine Gruppe von Agenten X noch, wenn eine **(nicht notwendigerweise zu X disjunkte)** Gruppe Y nicht verfügbar ist? Definieren Sie analog zu \oplus die Operation \ominus . Es soll also $(\text{intel}_X \ominus \text{intel}_Y)(a)$ die Anzahl der Einträge von $X \setminus Y$ in der Akte a sein, falls die Gruppe $X \setminus Y$ mindestens einen Eintrag geschrieben hat. (1.5 Punkte)
- d) Zeigen Sie, dass für **disjunkte** $X, Y \in \mathcal{P}(G)$ die Aussage $(\text{intel}_X \oplus \text{intel}_Y) \ominus \text{intel}_Y = \text{intel}_X$ mit Ihrer Definition aus der vorherigen Teilaufgabe gilt. (3 Punkte)

Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass die beiden partiellen Funktionen dieselbe Domäne haben und dass $((\text{intel}_X \oplus \text{intel}_Y) \ominus \text{intel}_Y)(a) = \text{intel}_X(a)$ für alle $a \in \text{Dom}(\text{intel}_X)$ gilt. Sie dürfen annehmen, dass $(\text{intel}_X \oplus \text{intel}_Y) \ominus \text{intel}_Y$ eine partielle Funktion ist.

Aufgabe 4 - Kreise ziehen (4 Punkte)

Gegeben sei die Relation $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Diese Menge kann man auch auffassen als die Menge aller Punkte, die auf dem Einheitskreis liegen:



In dieser Aufgabe definieren wir für $\text{lo}, \text{up} \in \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen zwischen lo und up als $[\text{lo}, \text{up}] = \{r \in \mathbb{R} \mid \text{lo} \leq r \leq \text{up}\}$.

Geben Sie für jede der folgenden Teilaufgaben jeweils $\text{lo}_x, \text{lo}_y, \text{up}_x, \text{up}_y \in [-1, 1]$ so an, dass die jeweiligen Anforderungen erfüllt sind. Dabei sei $[\text{lo}_x, \text{up}_x]$ der Definitions- und $[\text{lo}_y, \text{up}_y]$ der Zielbereich der zu betrachtenden Relation.

- a) $K \cap [\text{lo}_x, \text{up}_x] \times [\text{lo}_y, \text{up}_y]$ ist rechtseindeutig und es gilt $\text{up}_x - \text{lo}_x \geq 1$ und $\text{up}_y - \text{lo}_y \geq 1$. (0.5 Punkte)
- b) $K \cap [\text{lo}_x, \text{up}_x] \times [\text{lo}_y, \text{up}_y]$ ist linkseindeutig und es gilt $\text{up}_x + \text{up}_y - \text{lo}_x - \text{lo}_y \geq 3$. (0.5 Punkte)
- c) $K \cap [\text{lo}_x, \text{up}_x] \times [\text{lo}_y, \text{up}_y]$ ist linkseindeutig und rechtstotal, jedoch nicht rechtseindeutig. (1 Punkt)
- d) $K \cap [\text{lo}_x, \text{up}_x] \times [\text{lo}_y, \text{up}_y]$ ist eine surjektive, jedoch nicht injektive Funktion. Welche Eigenschaften müssen $\text{lo}_x, \text{lo}_y, \text{up}_x, \text{up}_y$ erfüllen, damit diese Anforderungen erfüllt sind? Begründen Sie kurz. (2 Punkte)

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Lösungen **müssen** handschriftlich erstellt werden
- Ihre Abgabe sollte die erste Seite dieser Datei als Deckblatt haben
- Ihre Abgabe muss **rechtzeitig** erfolgen

Außerdem, wenn Sie Ihre Ausarbeitung über die Abgabekästen im Keller des Informatik-Gebäudes abgeben:

- Ihre Abgabe muss in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet werden
- Tablet-Ausdrucke sind zulässig

Wenn Sie Ihre Ausarbeitung online über ILIAS abgeben, dann achten Sie darauf:

- Ihre Abgabe muss **genau eine** PDF-Datei sein
- Scans und lesbare Fotos sind zulässig
- Abgabe erfolgt unter „Tutorien“ im Ordner **Ihres** Tutoriums