Karlsruher Institut für Technologie

Institute of Information Security and Dependability
Dr. Mattias Ulbrich
https://formal.kastel.kit.edu/

Übungsblatt 2

Grundbegriffe der Informatik — Winter 2023/24

Tutor*in:

Tutorium Nr.:

Nach-,Vorname 1: ,

Matr.nr. 1:

Nach-,Vorname 2: ,

Matr.nr. 2:

Ausgabe: 7. November 2023, 14:30 Uhr

Abgabe: 17. November 2023, 12:30 Uhr

Bitte beachten Sie die Hinweise auf der letzten Seite.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:*

Blatt 2: / 0

Blätter 1 – 2, Stud. 1: / 0

Blätter 1 – 2, Stud. 2: / 0

Aufgabe 1 - Dysfunktionale Relationen Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie für jede der folgenden Relationen, dass sie als Teilmenge des gegeben kartesischen Produkts eine Funktion ist.

a) $A = \{(1,1),(2,1),(3,1)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \mathbb{N}$ (1 Punkt)

b) $B = \{(1,1),(2,1),(3,1)\} \subseteq \mathbb{N}^2$ (1 Punkt)

c) $C = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n = m^2\} \subseteq \mathbb{N}^2$ (1 Punkt)

d) $D = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n < m\} \subseteq \mathbb{N}^2$ (1 Punkt)

e) $E = \{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid m \in p \text{ genau dann wenn } m \text{ teilt } n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (2 Punkte)

Lösung 1

a) A ist linkstotal, weil für jedes $n \in \{1,2,3\}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $(n,m) \in A$, nämlich $m = 1$. A ist auch rechtseindeutig, weil für jedes solche n höchstens ein solches m existiert. Also ist A eine Funktion.

b) B ist nicht linkstotal, weil z. B. für $4 \in \mathbb{N}$ kein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $(4,m) \in A$. Also ist B keine Funktion.

c) C ist nicht linkstotal, weil z. B. für $2 \in \mathbb{N}$ kein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $m^2 = 2$ (denn $\sqrt{2}$ ist keine natürliche Zahl). Also ist C keine Funktion.

d) D ist nicht rechtseindeutig, weil z. B. sowohl $(1,2) \in D$ als auch $(1,3) \in D$. Also ist D keine Funktion.

e) E ist linkstotal, weil für jede natürliche Zahl eine Teilermenge existiert. E ist auch rechtseindeutig, weile jede natürliche Zahl höchstens eine Teilermenge hat. Also ist E eine Funktion.

Aufgabe 2 - Dr. Meta auf der Flucht Punkte)

Der ebenso hinterhältige wie geniale Superbösewicht Dr. Meta verfolgt unermüdlich das Ziel, die Weltherrschaft an sich zu reißen. Bisher wurde er glücklicherweise stets von einer ungewöhnlichen Allianz gewiefter Studierenden des KIT, der Geheimbrigade der Informatik (GBI) aufgehalten.

Nun hat Dr. Meta die Aufmerksamkeit der GBI auf sich gezogen: Er wurde wiederholt dabei beobachtet, wie er verdächtig viele Kartons mit undefinierbarem Inhalt in Richtung Campus transportiert hat. Doch bevor die GBI seinen Standort genau bestimmen konnte, ist Dr. Meta getürmt. Die GBI nimmt die Verfolgung auf.

Das Gebiet, das durchsucht werden soll, teilt sie dazu in eine Menge von Koordinaten $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 42 \text{ und } 0 \leq y \leq 30\}$ auf. Die Agenten der GBI gehen systematisch vor und rücken in jedem Schritt **entweder** eine Koordinate in positive x-Richtung **oder** eine Koordinate in positive y-Richtung vor.

Nun sind Sie gefragt: Helfen Sie der GBI, den Schurken ausfindig zu machen!

a) Definieren Sie die Relation $\texttt{step} \subseteq S \times S$ aller Schritte, indem Sie einen Klassenterm angeben. Ein Schritt von Koordinate (x, y) zu Koordinate (x', y') soll dabei als Tupel $((x, y), (x', y'))$, dargestellt werden. (1 Punkt)

Sei nun die Funktion $\faHome \colon S \to \{\square, \blacksquare\}$ gegeben. Es ist $\faHome((x, y)) = \blacksquare$ genau dann, wenn an Koordinate (x, y) ein Hindernis, wie z. B. ein Gebäude, steht und damit (x, y) nicht betreten werden kann. Für alle anderen $(x', y') \in S$ gilt $\faHome((x', y')) = \square$.

b) Geben Sie die Menge der Koordinaten an, an denen sich ein Hindernis befindet. (0.5 Punkte)

c) Geben Sie die Relation $\texttt{step}_{\faHome} \subseteq S \times S$ aller gültigen Schritte als Mengenausdruck an. Verwenden Sie keine Klassentermschreibweise. Ein Schritt ist gültig, wenn weder sein Start- noch sein Zielkoordinate ein Hindernis enthalten. (1 Punkt)

Dr. Meta wurde an Koordinate $(42, 30)$ gesichtet! Doch welche Agenten können überhaupt zu ihm gelangen? Um zu verhindern, dass er ihnen entwischt, rücken die Agenten weiterhin nur in gültigen Schritten vor, also solchen, die in $\texttt{step}_{\faHome}$ enthalten sind.

d) Definieren Sie die Funktion $\texttt{path} \colon S \to \{\texttt{true, false}\}$, die eine Koordinate (x, y) genau dann auf $\texttt{true}$ abbildet, wenn $(42, 30)$ von (x, y) aus über gültige Schritte erreicht werden kann. (2 Punkte)

Lösung 2

a) $\texttt{step} = \{((x, y), (x', y')) \in S \times S \mid x = x', y' = y + 1 \text{ oder } x' = x + 1, y = y'\}$

b) Die Menge der Koordinaten mit Hindernis ist $H = \left\{(x, y) \mid \faHome((x, y)) = \blacksquare\right\}$

c) Weder Start- noch Zielkoordinate eines gültigen Schrittes dürfen von $\texttt{step}$ auf $\blacksquare$ abgebildet werden. Also:

$$\texttt{step}_{\faHome} = \texttt{step} \cap ((S \setminus H) \times (S \setminus H))$$

d)

$$\mathtt{path}((x,y)) = \begin{cases} \mathtt{true} & \mid (x,y) = (42,30) \\ \mathtt{true} & \mid \mathtt{step}_{\text{⌂}}((x,y),(x+1,y)) \text{ und } \mathtt{path}((x+1,y)) \\ \mathtt{true} & \mid \mathtt{step}_{\text{⌂}}((x,y),(x,y+1)) \text{ und } \mathtt{path}((x,y+1)) \\ \mathtt{false} & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3 - Zettelwirtschaft Punkte)

Nun, da der Fall Dr. Meta wieder aufgerollt wird, beschließt die GBI, ihr Wissen über den brillanten Bösewicht zusammenzutragen. Nur leider ist dieses Wissen über viele Akten verstreut.

Sei $\mathcal{A}$ die Menge der Akten zum Fall Dr. Meta und sei G die Menge aller Agenten der GBI. Weder $\mathcal{A}$ noch G sind leer. Für jede Gruppe von Agenten $X \in \mathcal{P}(G)$ beschreibt die partielle Funktion $\mathtt{intel}_X : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathbb{N}_+$, wie viel die Agenten aus X wissen: Haben sie in einer Akte $a \in A$ mindestens einen Eintrag geschrieben, dann ist $\mathtt{intel}_X(a)$ die Anzahl der Einträge von X in a.

Leider ist das nur eine partielle Funktion, d. h. sie ist nicht für alle, sondern nur für manche Akten bekannt. Um festzustellen, wie viel mehrere Agenten zusammen wissen, kombinieren wir die ihnen zugeordneten partiellen Funktionen. Dazu definieren wir Folgendes. Dabei ist die *Domäne* einer partiellen Funktion $f : A \dashrightarrow B$, geschrieben $\mathrm{Dom}(f)$, die Menge aller Werte im Definitionsbereich, auf denen f definiert ist; formal: $\mathrm{Dom}(f) = \{a \in A \mid \exists\, b \in B : \ (a,b) \in f\}$.

Für disjunkte Agentengruppen $X, Y \in \mathcal{P}(G)$ gelte:

$$\mathtt{intel}_X \oplus \mathtt{intel}_Y : \\ \mathcal{A} \dashrightarrow \mathbb{N}_+ \\ a \mapsto \begin{cases} \mathtt{intel}_X(a) + \mathtt{intel}_Y(a) & \mid a \in \mathrm{Dom}(\mathtt{intel}_X) \cap \mathrm{Dom}(\mathtt{intel}_Y) \\ \mathtt{intel}_X(a) & \mid a \in \mathrm{Dom}(\mathtt{intel}_X) \setminus \mathrm{Dom}(\mathtt{intel}_Y) \\ \mathtt{intel}_Y(a) & \mid a \in \mathrm{Dom}(\mathtt{intel}_Y) \setminus \mathrm{Dom}(\mathtt{intel}_X) \end{cases}$$

a) Die Agenten Alice und Bob haben sich mit den gleichen Akten $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ beschäftigt. Für $A = \{\text{Alice}\}$ und $B = \{\text{Bob}\}$ ist

$$\mathtt{intel}_A(a) = \begin{cases} 3 & \mid a = a_1 \\ 5 & \mid a = a_3 \end{cases} \qquad \mathtt{intel}_B(a) = \begin{cases} 1 & \mid a = a_1 \\ 9 & \mid a = a_2 \end{cases}$$

Geben Sie $\mathtt{intel}_A \oplus \mathtt{intel}_B$ an. (0.5 Punkte)

b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass für $\mathtt{intel}_X \oplus \mathtt{intel}_Y$ für alle disjunkten

$X, Y \in \mathcal{P}(G)$ wieder eine partielle Funktion ist. (1 Punkt)

c) Was weiß eine Gruppe von Agenten X noch, wenn eine (nicht notwendigerweise zu X disjunkte) Gruppe Y nicht verfügbar ist? Definieren Sie analog zu $\oplus$ die Operation $\ominus$. Es soll also $(\mathtt{intel}_X \ominus \mathtt{intel}_Y)(a)$ die Anzahl der Einträge von $X \setminus Y$ in der Akte a sein, falls die Gruppe $X \setminus Y$ mindestens einen Eintrag geschrieben hat. (1.5 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass für disjunkte $X, Y \in \mathcal{P}(G)$ die Aussage $(\mathtt{intel}_X \oplus \mathtt{intel}_Y) \ominus \mathtt{intel}_Y = \mathtt{intel}_X$ mit Ihrer Definition aus der vorherigen Teilaufgabe gilt. (3 Punkte)

Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass die beiden partiellen Funktionen dieselbe Domäne haben und dass $((\mathtt{intel}_X \oplus \mathtt{intel}_Y) \ominus \mathtt{intel}_Y)(a) = \mathtt{intel}_X(a)$ *für alle* $a \in \mathrm{Dom}(\mathtt{intel}_X)$ *gilt. Sie dürfen annehmen, dass* $(\mathtt{intel}_X \oplus \mathtt{intel}_Y) \ominus \mathtt{intel}_Y$ eine partielle Funktion ist.

Lösung 3

a)

$$(\mathtt{intel}_A \oplus \mathtt{intel}_B)(a) = \begin{cases} 4 & \mid a = a_1 \\ 9 & \mid a = a_2 \\ 5 & \mid a = a_3 \end{cases}$$

b) Wir verwenden im Folgenden Dom_X und Dom_Y als Abkürzung für $\mathrm{Dom}(\mathtt{intel}_X)$ bzw. $\mathrm{Dom}(\mathtt{intel}_Y)$.
Wir zeigen: $\mathtt{intel}_{X \cup Y} = \mathtt{intel}_X \oplus \mathtt{intel}_Y$ ist eine partielle Funktion. Dazu müssen wir zeigen, dass $\mathtt{intel}_{XY}$ rechtseindeutig ist.
Sei dazu $a \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gibt es vier Möglichkeiten:

- $a \in \mathrm{Dom}_X \cap \mathrm{Dom}_Y$
  Dann ist $(\mathtt{intel}_X \oplus \mathtt{intel}_Y)(a) = \mathtt{intel}_X(a) + \mathtt{intel}_Y(a)$ eindeutig nach Definition von $\oplus$.
- $a \in \mathrm{Dom}_X \setminus \mathrm{Dom}_Y$
  Dann ist $a \notin \mathrm{Dom}_X$ und damit $(\mathtt{intel}_X \oplus \mathtt{intel}_Y)(a) = \mathtt{intel}_X(a)$ eindeutig nach Definition von $\oplus$.
- $a \in \mathrm{Dom}_Y \setminus \mathrm{Dom}_X$
  Dann ist $a \notin \mathrm{Dom}_X$ und damit $(\mathtt{intel}_X \oplus \mathtt{intel}_Y)(a) = \mathtt{intel}_Y(a)$ eindeutig nach Definition von $\oplus$.

- $a \notin \text{Dom}_X \cup \text{Dom}_Y$
  Dann ist $\texttt{intel}_X(a)$ nicht definiert. Auch das widerspricht der Rechtseindeutigkeit nicht.

Also ist $\texttt{intel}_{X \cup Y}$ ist eine partielle Funktion.

c) Wir verwenden im Folgenden Dom_X und Dom_Y als Abkürzung für $\text{Dom}(\texttt{intel}_X)$ bzw. $\text{Dom}(\texttt{intel}_Y)$.

$$\begin{aligned}
&\texttt{intel}_X \ominus \texttt{intel}_Y : \\
&\qquad \mathcal{A} \dashrightarrow \mathbb{N}_+ \\
&\qquad a \mapsto \begin{cases} \texttt{intel}_X(a) - \texttt{intel}_{X \cap Y}(a) & \mid a \in \text{Dom}_X \cap \text{Dom}_Y \text{ und} \\ & \quad \texttt{intel}_X(a) > \texttt{intel}_{X \cap Y}(a) \\ \texttt{intel}_X(a) & \mid a \in \text{Dom}_X \setminus \text{Dom}_Y \\ \text{nicht definiert} & \mid \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

d) Auch hier verwenden im Folgenden Dom_X und Dom_Y als Abkürzung für $\text{Dom}(\texttt{intel}_X)$ bzw. $\text{Dom}(\texttt{intel}_Y)$.
Um zu zeigen, dass $(\texttt{intel}_X \oplus \texttt{intel}_Y) \ominus \texttt{intel}_Y = \texttt{intel}_X$ ist, zeigen wir für jedes $a \in \mathcal{A}$, dass $((\texttt{intel}_X \oplus \texttt{intel}_Y) \ominus \texttt{intel}_Y)(a) = \texttt{intel}_X(a)$ gilt.
Sei also $a \in \mathcal{A}$. Dann gibt es vier Möglichkeiten:

- $a \in \text{Dom}_X \cap \text{Dom}_Y$
  Dann ist $(\texttt{intel}_X \oplus \texttt{intel}_Y)(a) = \texttt{intel}_X(a) + \texttt{intel}_Y(a)$. Weil $\texttt{intel}_X(a)$ definiert ist, wissen wir auch, dass $\texttt{intel}_X(a) > 0$ und damit $\texttt{intel}_{X \cup Y}(a) = (\texttt{intel}_X \oplus \texttt{intel}_Y)(a) > \texttt{intel}_{(X \cup Y) \cap Y}(a) = \texttt{intel}_Y(a)$ Da $a \in \text{Dom}_Y$ ist

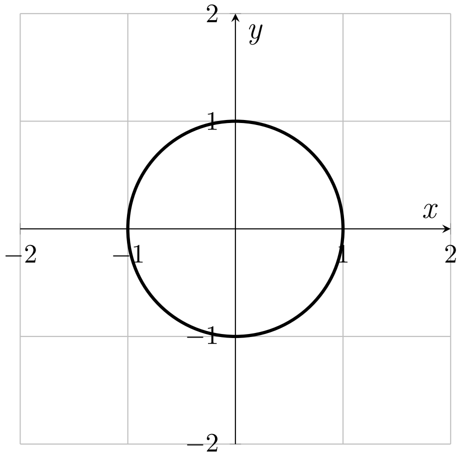
  $$\begin{aligned} ((\texttt{intel}_X \oplus \texttt{intel}_Y) \ominus \texttt{intel}_Y)(a) &= \texttt{intel}_X + \texttt{intel}_Y(a) - \texttt{intel}_Y(a) \\ &= \texttt{intel}_X(a) \end{aligned}$$

- $a \in \text{Dom}_X \setminus \text{Dom}_Y$
  Dann ist $(\texttt{intel}_X \oplus \texttt{intel}_Y)(a) = \texttt{intel}_X(a)$. Weil $\texttt{intel}_Y(a)$ nicht definiert ist, ist auch $((\texttt{intel}_X \oplus \texttt{intel}_Y) \ominus \texttt{intel}_Y)(a) = \texttt{intel}_X(a)$.
- $a \in \text{Dom}_Y \setminus \text{Dom}_X$
  Dann ist $(\texttt{intel}_X \oplus \texttt{intel}_Y)(a) = \texttt{intel}_Y(a)$. Weil das genau der Wert $\texttt{intel}_Y(a)$ ist, ist das Ergebnis von $\ominus$, also $((\texttt{intel}_X \ominus \texttt{intel}_Y) \oplus \texttt{intel}_Y)(a)$, nicht definiert.
- $a \notin \text{Dom}_X \cup \text{Dom}_Y$
  Dann ist $\texttt{intel}_X(a)$ nicht definiert. Zudem ist $(\texttt{intel}_X \ominus \texttt{intel}_Y)(a)$

nicht definiert, da a nicht in Dom_X enthalten ist. Mit dem gleichen Argument ist $((\mathtt{intel}_X \ominus \mathtt{intel}_Y) \oplus \mathtt{intel}_Y)(a)$ nicht definiert.

Aufgabe 4 - Kreise ziehen Punkte)

Gegeben sei die Relation $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Diese Menge kann man auch auffassen als die Menge aller Punkte, die auf dem Einheitskreis liegen:



In dieser Aufgabe definieren wir für $\mathtt{lo}, \mathtt{up} \in \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen zwischen $\mathtt{lo}$ und $\mathtt{up}$ als $[\mathtt{lo}, \mathtt{up}] = \{r \in \mathbb{R} \mid \mathtt{lo} \leq r \leq \mathtt{up}\}$.
Geben Sie für jede der folgenden Teilaufgaben jeweils $\mathtt{lo}_x, \mathtt{lo}_y, \mathtt{up}_x, \mathtt{up}_y \in [-1, 1]$ so an, dass die jeweiligen Anforderungen erfüllt sind. Dabei sei $[\mathtt{lo}_x, \mathtt{up}_x]$ der Definitions- und $[\mathtt{lo}_y, \mathtt{up}_y]$ der Zielbereich der zu betrachtenden Relation.

a) $K \cap [\mathtt{lo}_x, \mathtt{up}_x] \times [\mathtt{lo}_y, \mathtt{up}_y]$ ist rechtseindeutig und es gilt $\mathtt{up}_x - \mathtt{lo}_x \geq 1$ und $\mathtt{up}_y - \mathtt{lo}_y \geq 1$. (0.5 Punkte)

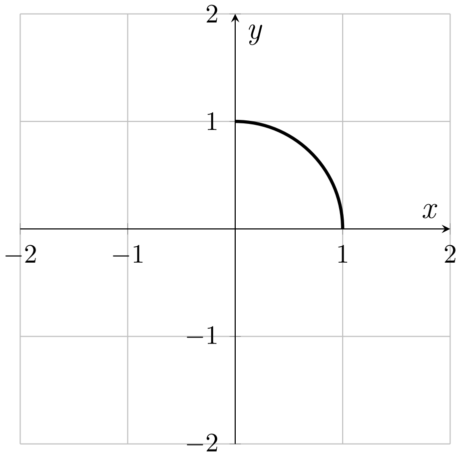
b) $K \cap [\mathtt{lo}_x, \mathtt{up}_x] \times [\mathtt{lo}_y, \mathtt{up}_y]$ ist linkseindeutig und es gilt $\mathtt{up}_x + \mathtt{up}_y - \mathtt{lo}_x - \mathtt{lo}_y \geq 3$. (0.5 Punkte)

c) $K \cap [\mathtt{lo}_x, \mathtt{up}_x] \times [\mathtt{lo}_y, \mathtt{up}_y]$ ist linkseindeutig und rechtstotal, jedoch nicht rechtseindeutig. (1 Punkt)

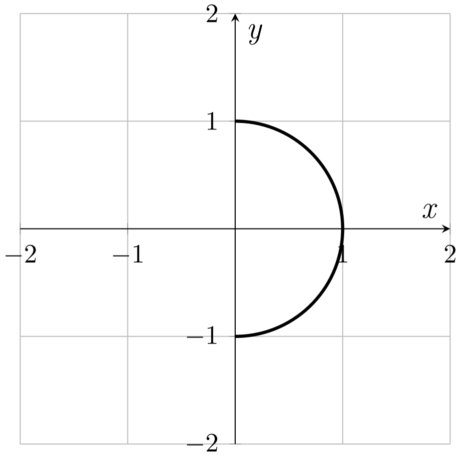
d) $K \cap [\mathtt{lo}_x, \mathtt{up}_x] \times [\mathtt{lo}_y, \mathtt{up}_y]$ ist eine surjektive, jedoch nicht injektive Funktion. Welche Eigenschaften müssen $\mathtt{lo}_x, \mathtt{lo}_y, \mathtt{up}_x, \mathtt{up}_y$ erfüllen, damit diese Anforderungen erfüllt sind? Begründen Sie kurz. (2 Punkte)

Lösung 4

a) Hier gibt es mehrere Lösungen, z.B. $\texttt{lo}_x = 0, \texttt{up}_x = 1, \texttt{lo}_y = 0, \texttt{up}_y = 1$



b) Eine mögliche Lösung ist $\texttt{lo}_x = 0, \texttt{up}_x = 1, \texttt{lo}_y = -1, \texttt{up}_y = 1$



c) Die Lösung der vorherigen Teilaufgabe erfüllt bereits alle Anforderungen.

d) Damit $K' = K \cap [\texttt{lo}_x, \texttt{up}_x] \times [\texttt{lo}_y, \texttt{up}_y]$ eine Funktion ist, muss sie linkstotal und rechtseindeutig sein.

Damit K' rechtseindeutig ist, darf es keine zwei Tupel $(x, y), (x, y') \in K$ mit $y \neq y'$ geben. Das bedeutet wiederum, dass $y^2 \neq y'^2$ für alle $(x, y), (x', y') \in K'$ gelten muss, also müssen $\texttt{lo}_y, \texttt{up}_y$ entweder beide nichtnegativ oder nichtpositiv sein. Damit K' nicht injektiv ist, muss es zwei Tupel $(x, y), (x', y) \in K'$ mit $x \neq x'$ geben. Das bedeutet wiederum, dass $x^2 = x'^2$ sein muss, also muss $\texttt{lo}_x < 0$ und $\texttt{up}_x > 0$ gelten. Das bedeutet insbesondere, dass

$0 \in [\texttt{lo}_x, \texttt{up}_x]$ sein muss. Da $(0,1),(0,-1) \in K$, muss also $\texttt{lo}_y = -1, \texttt{up}_y \leq 0$ oder $\texttt{lo}_y \geq 0, \texttt{up}_y = 1$ gegeben sein.

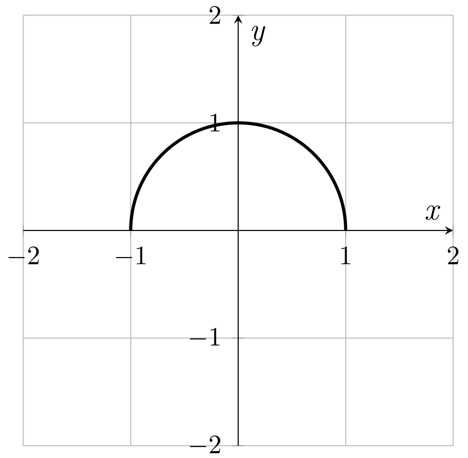
Linkstotalität ist dann gegeben, wenn es für jedes $x \in [\texttt{lo}_x, \texttt{up}_x]$ ein $y \in [\texttt{lo}_y, \texttt{up}_y]$ gibt mit $(x,y) \in K'$. Das bedeutet:

- Wenn $\texttt{lo}_y = -1$, dann $\texttt{up}_y \geq -\sqrt{1 - max(\texttt{lo}_x^2, \texttt{up}_x^2)}$
- Wenn $\texttt{up}_y = 1$, dann $\texttt{lo}_y \leq \sqrt{1 - max(\texttt{lo}_x^2, \texttt{up}_x^2)}$

Die Surjektivität von K' ist dann gegeben, wenn es für jedes $y \in [\texttt{lo}_y, \texttt{up}_y]$ ein $x \in [\texttt{lo}_x, \texttt{up}_x]$ gibt mit $(x,y) \in K'$ also insgesamt

- Wenn $\texttt{lo}_y = -1$, dann $\texttt{up}_y = -\sqrt{1 - max(\texttt{lo}_x^2, \texttt{up}_x^2)}$
- Wenn $\texttt{up}_y = 1$, dann $\texttt{lo}_y = \sqrt{1 - max(\texttt{lo}_x^2, \texttt{up}_x^2)}$

Eine Möglichkeit, diese Anforderungen zu erfüllen, ist die folgende:
$\texttt{lo}_x = -1, \texttt{up}_x = 1, \texttt{lo}_y = 0, \texttt{up}_y = 1$



Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Lösungen **müssen** handschriftlich erstellt werden
- Ihre Abgabe sollte die erste Seite dieser Datei als Deckblatt haben
- Ihre Abgabe muss **rechtzeitig** erfolgen

Außerdem, wenn Sie Ihre Ausarbeitung über die Abgabekästen im Keller des Informatik-Gebäudes abgeben:

- Ihre Abgabe muss in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet werden
- Tablet-Ausdrucke sind zulässig

Wenn Sie Ihre Ausarbeitung online über ILIAS abgeben, dann achten Sie darauf:

- Ihre Abgabe muss **genau eine** PDF-Datei sein
- Scans und lesbare Fotos sind zulässig
- Abgabe erfolgt unter „Tutorien“ im Ordner **Ihres** Tutoriums