Karlsruher Institut für Technologie

Institute of Information Security and Dependability
Dr. Mattias Ulbrich
https://formal.kastel.kit.edu/

Übungsblatt 4

Grundbegriffe der Informatik — Winter 2023/24

Tutor*in:		Tutorium Nr.:	
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 2:		,	
Matr.nr. 2:			

Ausgabe: 21. November 2023, 14:30 Uhr

Abgabe: 1. Dezember 2023, 12:30 Uhr

Bitte beachten Sie die Hinweise auf der letzten Seite.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:*

Blatt 4:	/ 20	Blätter 1 – 4, Stud. 1:	/ 80
		Blätter 1 – 4, Stud. 2:	/ 80

Aufgabe 1 - Wettervorhersagen (6.5 Punkte)

Gegeben seien die aussagenlogischen Variablen R, B, S und T mit der folgenden Bedeutung.

- R = „Es regnet."
- B = „Ein Regenbogen ist zu sehen."
- S = „Die Person hat einen Regenschirm dabei."
- T = „Die Person bleibt trocken."

a) Übersetzen Sie die folgenden natürlichsprachlichen Aussagen jeweils in Aussagenlogik.

   i) „Ein Regenbogen ist nur zu sehen, wenn es regnet." (0.5 Punkte)

   ii) „Wenn es regnet, die Person aber keinen Schirm dabei hat, dann wird die Person nass." (0.5 Punkte)

   iii) „Wenn die Person einen Schirm dabei hat, bleibt die Person trocken." (0.5 Punkte)

b) Sei Γ die Menge aller Aussagen aus Aufgabenteil (a). Beweisen Sie in natürlicher Sprache die Folgerung $\Gamma \models (T \land \neg S) \to \neg B$, indem Sie den folgenden Lückentext vervollständigen. (2 Punkte)

   Zu zeigen ist die folgende Aussage:

   „____"

   Angenommen, das sei nicht wahr. Dann gilt, dass _______________________________________, aber trotzdem _______________________________________.

   Mit Aussage __ aus Aufgabenteil (a) folgt dann, dass ____________________.

   Daraus und aus der Tatsache, dass die Person keinen Schirm dabei hat, folgt mit Aussage __ aus Aufgabenteil (a), dass _______________________________________.

   Daraus ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme. Also muss die ursprüngliche Aussage richtig sein.

c) Nehmen Sie an, Sie wollen wissen, ob ein Regenbogen zu sehen ist, ohne aus dem Fenster schauen zu müssen. Ihr Mitbewohner ist gerade nach Hause gekommen und ist nicht nass geworden. Wenn Sie ihn nun fragen, ob er einen Regenschirm dabei hatte und er mit nein antwortet, wissen Sie, dass kein Regenbogen zu sehen ist (Falls er mit ja antwortet, müssen

Sie wohl doch den Rollladen hochziehen). Zeigen Sie, dass diese Argumentation gültig ist, indem Sie einen Beweisbaum für die folgende Formel angeben: (3 Punkte)

$$((T \land \neg S) \to \neg B) \to (T \to (\neg S \to \neg B))$$

Aufgabe 2 - Distributivgesetze (2+2 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die Distributivgesetze für Mengen kennengelernt, aber nicht bewiesen. Da sowohl Mengen- als auch Aussagenlogik boolesche Algebren sind, liegt die Vermutung nahe, dass es die Distributivgesetze

(i) $A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$

(ii) $A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$

auch in der Aussagenlogik gelten.

a) Zeigen Sie $A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$. Nutzen Sie dazu eine Wahrheitstabelle mit den folgenden Spalten: (2 Punkte)

A	B	C	(A ∧ B)	(A ∧ C)	(B ∨ C)	A ∧ (B ∨ C)	(A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

b) **Bonuspunkte:** Zeigen Sie die Hin-Richtung von (ii), nämlich

$$A \lor (B \land C) \to (A \lor B) \land (A \lor C)$$

indem Sie einen geschlossenen Beweisbaum im Kalkül des natürlichen Schließens für die Formel aufstellen. Sie können dafür das Schema aus Abb. 1 am Ende des Übungsblattes benutzen, müssen ihm aber nicht folgen. Markieren Sie an jedem Schlussstrich, welche Regel Sie angewendet haben. (2 Punkte)

Aufgabe 3 - Syntaktische Spielereien (6.5 Punkte)

Seien P, Q und R aussagenlogische Variablen.

a) Zeigen Sie $P \lor Q \equiv P \lor (\neg P \land Q)$, indem Sie die eine Formel schrittweise in die andere umformen. Verwenden Sie dazu die Distributivgesetze aus der vorherigen Aufgabe und die Tautologien am Ende von Abschnitt 5.3 im Skript, zusammen mit der folgenden Äquivalenz: $F \equiv \mathtt{WAHR} \land F$. (2 Punkte)

b) Betrachten Sie die folgende aussagenlogische Formel:

$$F = (P \lor Q) \land (R \lor P) \land (\neg Q \lor \neg R \lor P)$$

Geben Sie alle Modelle von F an. (1 Punkt)

c) Ist F erfüllbar? Ist F allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils. (2 Punkte)

d) Geben Sie eine zu F äquivalente Formel G an, die so kurz wie möglich ist, d. h. so wenig aussagenlogische Variablen und Konnektive wie möglich enthält. Begründen Sie, warum $F \equiv G$ und warum G kürzestmöglich ist. (1 Punkt)

e) Geben Sie eine aussagenlogische Formel F' an, sodass F' nicht allgemeingültig ist, $F \lor F'$ jedoch allgemeingültig ist. (0.5 Punkte)

Aufgabe 4 - Die Akte Hoare (5 Punkte)

Im Hauptquartier der GBI herrscht absolutes Chaos. Durch Ihre Hilfe konnten die Agenten, die als Spione für den berüchtigten Dr. Meta agiert haben, identifiziert werden. Besser gesagt: der Agent. Der Großteil der Beweislast ruht allein auf dem Agenten mit Decknamen Hoare. Doch bevor er befragt werden kann, wird Hoare leblos in seinem Büro aufgefunden. Alles deutet auf einen Suizid hin.

Doch Ihre neue Vorgesetzte, GBI-Detektivin mit Decknamen Lovelace, ist skeptisch. Sie stand Agent Hoare nahe und kann nicht glauben, dass er wirklich spioniert haben soll. Sie beschließt, eigene Ermittlungen durchzuführen.

Der Konkurrent von Detektivin Lovelace innerhalb der GBI, Deckname Zuse, hat maßgeblich zur Überführung von Hoare beigetragen. Er war es, der Hoare als denjenigen überführt hat, der die Schichtpläne der GBI für den kommenden Monat an den vermeintlichen Superbösewicht gesendet hat. Die Überführung stützt sich auf die folgenden Behauptungen Zuses:

1) Sowohl Agent Bellman, Agent Ford als auch Agent Hoare waren an diesem Tag im Hauptquartier, jedoch niemand sonst.

2) Wenn Bellman schuldig ist, hatte er genau einen Komplizen.

3) Wenn Ford unschuldig ist, dann ist es auch Hoare.

4) Wenn es genau zwei Schuldige gibt, dann ist Bellman einer von ihnen.

5) Wenn Hoare unschuldig ist, ist auch Ford unschuldig.

Helfen Sie Detektivin Lovelace, den wahren Schuldigen zu überführen!

a) Übersetzen Sie die obigen Behauptungen 1)-5) in aussagenlogische Formeln G_1-G_5. Beschränken Sie sich dabei nur auf die Informationen, die relevant sind, um herauszufinden, welcher Agent schuldig ist. Verwenden Sie die aussagenlogischen Variablen B, F, H mit den Bedeutungen: (2.5 Punkte)

- B = „Bellman ist schuldig.“
- F = „Ford ist schuldig.“
- H = „Hoare ist schuldig.“

b) Zuse hat bewiesen, dass $G_1 \wedge G_2 \wedge G_3 \wedge G_4 \wedge G_5 \rightarrow \mathtt{H}$ allgemeingültig ist. Er meint daher, dass Hoare schuldig sein müsse. Lovelace grübelt über diesen Beweis. Schließlich huscht ein triumphierenden Grinsen über ihr Gesicht. Welche Bedingung in Abhängigkeit von $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, \mathtt{H}, \mathtt{B}, \mathtt{F}$ muss zusätzlich noch gelten, um Hoares Schuld zu beweisen? Begründen Sie Ihre Antwort. Begründen Sie, warum diese Bedingung unerfüllbar ist. (2.5 Punkte)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathtt{A \lor (B \land C) \vdash A \lor (B \land C)}}\,(\mathsf{Ax}) \quad \dfrac{\vdots}{} \quad \dfrac{\vdots}{}}{} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathtt{A \lor (B \land C) \vdash A \lor (B \land C)}}\,(\mathsf{Ax}) \quad \dfrac{\vdots}{} \quad \dfrac{\vdots}{}}{}}{}}{\mathtt{A \lor (B \land C) \to (A \lor B) \land (A \lor C)}}$$

Abbildung 1: Schema eines Beweises in natürlichem Schließen für Aufgabe 2 b.

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Lösungen **müssen** handschriftlich erstellt werden
- Ihre Abgabe sollte die erste Seite dieser Datei als Deckblatt haben
- Ihre Abgabe muss **rechtzeitig** erfolgen

Außerdem, wenn Sie Ihre Ausarbeitung über die Abgabekästen im Keller des Informatik-Gebäudes abgeben:

- Ihre Abgabe muss in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet werden
- Tablet-Ausdrucke sind zulässig

Wenn Sie Ihre Ausarbeitung online über ILIAS abgeben, dann achten Sie darauf:

- Ihre Abgabe muss **genau eine** PDF-Datei sein
- Scans und lesbare Fotos sind zulässig
- Abgabe erfolgt unter „Tutorien“ im Ordner **Ihres** Tutoriums