Institute of Information Security and Dependability
Dr. Mattias Ulbrich
https://formal.kastel.kit.edu/

Übungsblatt 7

Grundbegriffe der Informatik — Winter 2023/24

Tutor*in: | Tutorium Nr.:

Nach-,Vorname: ,

Matr.nr.:

Ausgabe: 12. Dezember 2023, 14:30 Uhr
Abgabe: 22. Dezember 2023, 12:30 Uhr

Bitte beachten Sie die Hinweise auf der letzten Seite.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:*

Blatt 7: / 21 Blätter 1 – 7: / 143

Aufgabe 1 - Grammatiken (3 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, X, Y\}, \{\neg, \wedge, \vee, \mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{S &\rightarrow SXS \mid Y \mid \neg Y, \\ X &\rightarrow \wedge \mid \vee, \\ Y &\rightarrow \mathtt{x} \mid \mathtt{y} \mid \mathtt{z}\} \ . \end{aligned}$$

Mit G wird eine Untermenge der Formeln $L(G) \subseteq For_{AL}$ erzeugt.

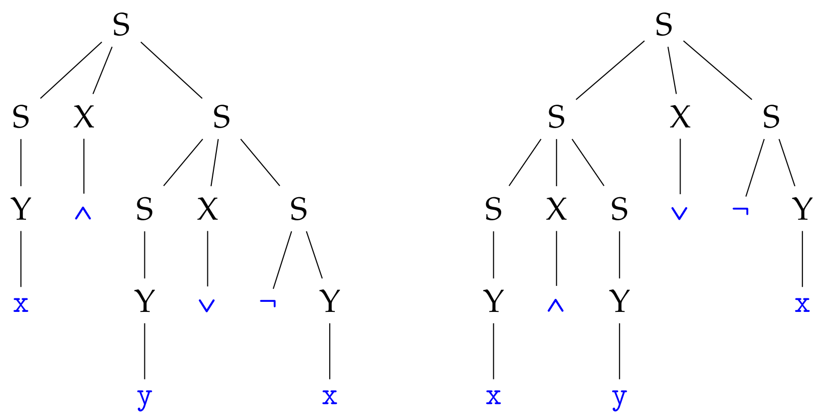
Diese Grammatik berücksichtigt nicht die Bindungsstärken der logischen Operatoren (siehe Abschnitt 5.2 im Skript). D. h. dass z. B. die Formel $\mathtt{x} \wedge \mathtt{y} \vee \neg \mathtt{x}$ mehrere Ableitungsbäume hat, die den verschiedenen möglichen Klammerungen entsprechen.

a) Geben Sie alle möglichen Ableitungsbäume für $\mathtt{x} \wedge \mathtt{y} \vee \neg \mathtt{x}$ an. (1 Punkt)

b) Geben Sie eine weitere Grammatik G_1 mit $L(G) = L(G_1)$ an, so dass in G_1 nur noch der Ableitungsbaum möglich ist, der der korrekten Klammerung entspricht, also dass die stärker bindende Operation näher an den Blättern des Baumes ist. (2 Punkte)

Lösung 1

a) Die folgenden beiden Ableitungsbäume sind möglich:



b) $G_1 = (\{S_1, X_1, Y_1\}, \{\neg, \wedge, \vee, \mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}, S_1, P_1)$ mit

$$\begin{aligned} P_1 = \{S_1 &\rightarrow S_1 \vee S_1 \mid X_1, \\ X_1 &\rightarrow X_1 \wedge X_1 \mid \neg Y_1 \mid Y_1, \\ Y_1 &\rightarrow \mathtt{x} \mid \mathtt{y} \mid \mathtt{z}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 - Mehr Grammatiken (6 Punkte)

In dieser Aufgabe befassen wir uns mit der Verbindung von logischen Operationen und kontextfreien Grammatiken. Sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ ein Alphabet und seien die folgenden Bedingungen gegeben:

- $B_1(w)$: Wenn $N_{\mathtt{c}}(w) > 0$, dann $N_{\mathtt{b}}(w) > 0$
- $B_2(w)$: Wenn $N_{\mathtt{a}}(w) = 0$, dann $N_{\mathtt{b}}(w) > 0$
- $B_3(w)$: $N_{\mathtt{a}}(w) > 0$ genau dann, wenn $N_{\mathtt{b}}(w) > 0$

Geben Sie zu jeder der unten aufgeführten Sprachen L_i jeweils eine kontextfreie Grammatik $G_i = (N_i, A, S_i, P_i)$ an, sodass $L_i = L(G_i)$.

a) $L_1 = \{w \in A^* \mid B_1(w)\}$ (2 Punkte)

b) $L_2 = \{w \in A^* \mid B_2(w)\}$ (1 Punkt)

c) $L_3 = \{w \in A^* \mid B_1(w)$ oder $B_2(w)\}$ (1 Punkt)

d) $L_4 = \{w \in A^* \mid B_3(w)\}$ (2 Punkte)

Lösung 2

a) $G_1 = (\{X_1, Y_1\}, A, X_1, P_1)$ mit

$$P_1 = \{X_1 \to \mathtt{a}X_1 \mid \mathtt{b}X_1 \mid Y_1\mathtt{c}Y_1\mathtt{b}Y_1 \mid Y_1\mathtt{b}Y_1\mathtt{c}Y_1 \mid \varepsilon, \quad Y_1 \to \mathtt{a}Y_1 \mid \mathtt{b}Y_1 \mid \mathtt{c}Y_1 \mid \varepsilon\}$$

b) $G_2 = (\{X_2, Y_2\}, A, X_2, P_2)$ mit

$$P_2 = \{X_2 \to \mathtt{b}X_2 \mid \mathtt{c}X_2 \mid \mathtt{b} \mid \mathtt{a}Y_2, \quad Y_2 \to \mathtt{a}Y_2 \mid \mathtt{b}Y_2 \mid \mathtt{c}Y_2 \mid \varepsilon\}$$

c) $G_3 = (\{X_3\} \cup N_1 \cup N_2, A, X_3, P_3)$ mit

$$P_3 = \{X_3 \to X_1 \mid X_2\} \cup P_1 \cup P_2$$

d) $G_4 = (\{X_4, Y_4\}, A, X_r4, P_4)$ mit

$$P_4 = \{X_4 \to \mathtt{c}X_4 \mid Y_4\mathtt{a}Y_4\mathtt{b}Y_4 \mid Y_4\mathtt{b}Y_4\mathtt{a}Y_4 \mid \varepsilon, \quad Y_4 \to \mathtt{a}Y_4 \mid \mathtt{b}Y_4 \mid \mathtt{c}Y_4 \mid \varepsilon\}$$

Aufgabe 3 - Noch mehr Grammatiken (6 Punkte)

Sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. Geben Sie für jede der folgenden Grammatiken G_i mit $i \in \{1,2,3,4\}$ die Sprache $L_i = L(G_i)$ an.

a) $G_1 = (\{X_1\}, \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}, X_1, \{X_1 \to X_1X_1 \mid \mathtt{(}X_1\mathtt{)}\})$ (1 Punkt)

b) $G_2 = (\{X_2\}, A, X_2, \{X_2 \to \mathtt{c}X_2 \mid X_2\mathtt{a}X_2\mathtt{b}X_2 \mid X_2\mathtt{b}X_2\mathtt{a}X_2 \mid \varepsilon\})$ (1 Punkt)

c) $G_3 = (\{X_3\}, A, X_3, \{X_3 \to \mathtt{a}X_3\mathtt{a} \mid \mathtt{b}X_3\mathtt{b} \mid \mathtt{c}X_3\mathtt{c} \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \mid \mathtt{c} \mid \varepsilon\})$ (1 Punkt)

d) $G_4 = (\{S, T, X, Y, Z\}, A, S, P)$ mit (1 Punkt)

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to \mathtt{a}S\mathtt{a} \mid \mathtt{b}S\mathtt{b} \mid \mathtt{c}S\mathtt{c} \mid \mathtt{a}TX \mid \mathtt{b}TY \mid \mathtt{c}TZ \\
T &\to \mathtt{a}T \mid \mathtt{b}T \mid \mathtt{c}T \mid \varepsilon \\
X &\to \mathtt{b} \mid \mathtt{c} \\
Y &\to \mathtt{a} \mid \mathtt{c} \\
Z &\to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}\}
\end{aligned}
$$

e) Beweisen Sie, dass für Ihre Antwort auf Teilaufgabe (c) $L_3 = L(G_3)$ gilt. (2 Punkte)

Hinweis: Sie können sich an der Beweisskizze auf Folie 25 des 12. Kapitels der Vorlesung orientieren. Über welche Größe bietet es sich hier an einen induktiven Beweis zu führen?

Lösung 3

a) $L_1 = \emptyset$

b) $L_2 = \{w \in A^* \mid N_{\mathtt{a}}(w) = N_{\mathtt{b}}(w)\}$

c) $L_3 = \{w \in A^* \mid w = R(w)\} = \{w \in A^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$

d) $L_4 = \{w \in A^* \mid w \neq R(w)\} = A^* \setminus L_3$

e) Es gilt $L(G_3) = \{w \in A^* \mid X_3 \Rightarrow^* w\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} \{w \in A^* \mid X_3 \Rightarrow^i w\}$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren die Sprachen

$$
\begin{aligned}
P_n^g &= \left\{w \in A^{2n} \mid \text{Es gibt } v \in A^n \text{ so, dass } w = v \cdot R(v)\right\} \\
P_n^u &= \left\{w \in A^{2n+1} \mid \text{Es gibt } v \in A^n, x \in A \text{ so, dass } w = v \cdot x \cdot R(v)\right\}.
\end{aligned}
$$

Dann ist $L_3 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} (P_n^g \cup P_n^u)$.

Wir zeigen $L(G_3) = L_3$ mit Hilfe von vollständiger Induktion:

Beh: Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt $\{w \in A^* \mid X_3 \Rightarrow^n w\} = P^g_{n-1} \cup P^u_{n-1}$.

IA: n = 1 ✓

$$\left\{w \in A^* \mid X_3 \Rightarrow^1 w\right\} = \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\} = \{\varepsilon\} \cup \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\} = P^g_0 \cup P^u_0$$

IS: $n \rightsquigarrow n+1$

IV: Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig aber fest. Dann gilt $\{w \in A^* \mid X_3 \Rightarrow^n w\} = P^g_{n-1} \cup P^u_{n-1}$.

IB: Es gilt $\left\{w \in A^* \mid X_3 \Rightarrow^{n+1} w\right\} = P^g_n \cup P^u_n$.

$$\begin{aligned}
\left\{w \in A^* \mid X_3 \Rightarrow^{n+1} w\right\} &= \{xwx \in A^* \mid x \in A \text{ und } X_3 \Rightarrow^n w\} \\
&\overset{\textbf{IV}}{=} \left\{xwx \in A^* \mid x \in A \text{ und } w \in P^g_{n-1} \cup P^u_{n-1}\right\} \\
&= \left\{xwx \in A^* \mid x \in A \text{ und } w \in P^g_{n-1}\right\} \\
&\quad \cup \left\{xwx \in A^* \mid x \in A \text{ und } w \in P^u_{n-1}\right\} \\
&= \left\{w \in A^* \mid w \in P^g_n\right\} \cup \{w \in A^* \mid w \in P^u_n\} \\
&= \left\{w \in A^* \mid w \in P^g_n \cup P^u_n\right\} \\
&= P^g_n \cup P^u_n
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4 - Game of Life (6 Punkte)

Das *Spiel des Lebens* (eng.: Game of Life) basiert auf einem unendlichen Spielfeld und vier Regeln.

Das Spielfeld besteht aus Zellen, wobei jede Koordinate aus $\mathbb{Z}^2$ zu genau einer Zelle gehört. Eine Zelle kann dabei lebendig (■) oder tot (□) sein. Sie wird außerdem beeinflusst von ihrer Nachbarschaft. Die Nachbarschaft der Zelle an Koordinate $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ besteht aus den Zellen mit den Koordinaten aus $\{(x, y) \mid \max\{|x - i|, |y - j|\} = 1\}$ (siehe Abb. 1).

Das Spiel verläuft in Schritten.In jedem Schritt verändert sich dabei der Zustand des Spielfeldes nach den folgenden Regeln:

i) Jede lebendige Zelle (■) mit weniger als zwei lebendigen Nachbarn stirbt an Unterbevölkerung.

ii) Jede lebendige Zelle (■) mit zwei oder drei lebendigen Nachbarn lebt weiter.

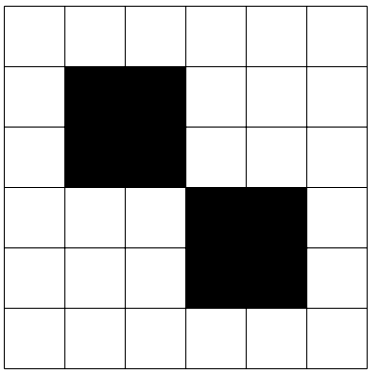
iii) Jede lebendige Zelle (■) mit mehr als drei lebendigen Nachbarn stirbt an Überbevölkerung.

iv) Jede tote Zelle (□) mit genau drei lebendigen Nachbarn wird durch Reproduktion lebendig.

Der Zustand des Spielfeldes wird durch eine Funktion von Koordinaten auf $\{\square, \blacksquare\}$ beschrieben. Die Menge aller möglichen Spielfeldzustände ist damit $\{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}^2}$.

Das Spiel des Lebens ist ein Spiel für 0 Spieler, es läuft nach festen Regeln ab, ohne dass der Spielzustand von anderen Parteien als den Regeln verändert werden kann. Zu jedem Spielzustand gibt es genau einen Folgezustand, es gibt also keine Entscheidungen zu treffen.

a) Betrachten Sie den folgenden Ausschnitt des Spielfeldes:



Geben Sie den Zustand der dargestellten Zellen nach einem Schritt und nach zwei Schritten an. (1 Punkt)

b) Geben Sie eine Funktion `env` an, die für eine gegebene Koordinate (i, j) und einen Spielfeldzustand l die Anzahl der lebendigen Nachbarn der Zelle an (i, j) bestimmt. (0.5 Punkte)

c) Geben Sie eine Funktion `cellstep` an, die den Spielfeldzustand l und eine Koordinate (i, j) erhält und den Zustand der Zelle an (i, j) nach einem Schritt zurückgibt. (1 Punkt)

d) Formulieren Sie eine Funktion `step`, die einen Spielbrettzustand erhält und den Spielfeldzustand nach einem Schritt zurückgibt. (0.5 Punkte)

Sei $\texttt{step}^*$ die reflexiv-transitive Hülle von $\texttt{step}$. Außerdem sei die (nicht notwendigerweise reflexive) transitive Hülle $\texttt{step}^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \texttt{step}^i$ von $\texttt{step}$. Es gilt also $\texttt{step}^+ = \texttt{step} \circ \texttt{step}^*$.

e) Beschreiben Sie, welche Beziehung zwischen einem Spielfeldzustand l und der Menge $\left\{ m \in \{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}^2} \mid (l, m) \in \texttt{step}^* \right\}$ besteht. (0.5 Punkte)

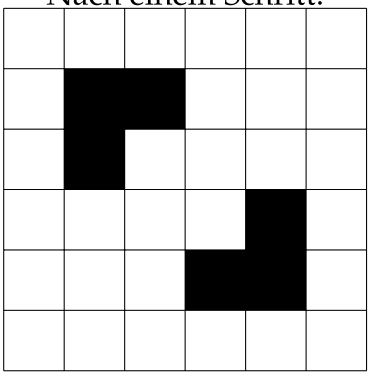
f) Geben Sie einen Spielfeldzustand l so an, dass $(l, l) \in \texttt{step}^+$ gilt. (0.5 Punkte)

g) Geben Sie einen Spielfeldzustand l so an, dass es in l höchstens 15 lebendige Felder gibt und dass $\left\{ m \in \{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}^2} \mid (l, m) \in \texttt{step}^* \right\}$ eine unendliche Menge ist. (2 Punkte)

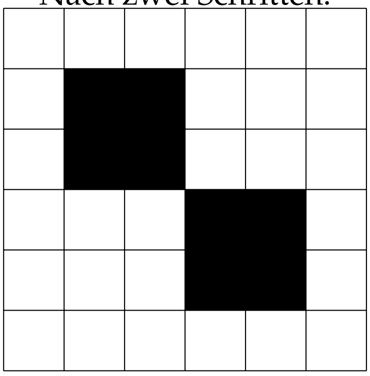
Lösung 4

a)

Nach einem Schritt:



Nach zwei Schritten:



b)

$$\texttt{env}\colon \{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}^2} \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}_0$$
$$(l, (i, j)) \mapsto \left| \{ (x, y) \mid \max \{|x - i|, |y - j|\} = 1 \text{ und } l((x, y)) = \blacksquare \} \right|$$

c)

$$\texttt{cellstep}\colon \{\square, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}^2} \times \mathbb{Z}^2 \to \{\square, \blacksquare\}$$
$$\texttt{cellstep}(l, (i, j)) = \begin{cases} \blacksquare, & \text{falls } l(i, j) = \blacksquare \text{ und } \texttt{env}(l, (i, j)) \in \{2, 3\} \\ \blacksquare, & \text{falls } l(i, j) = \square \text{ und } \texttt{env}(l, (i, j)) = 3 \\ \square, & \text{sonst} \end{cases}$$

d)

$$\begin{aligned}&\texttt{step}\colon \{\square,\blacksquare\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{\square,\blacksquare\}^{\mathbb{Z}^2}\\&(\texttt{step}(l))(i,j) = \texttt{cellstep}(l,(i,j))\end{aligned}$$

e) $\left\{m \in \{\square,\blacksquare\}^{\mathbb{Z}^2} \mid (l,m) \in \texttt{step}^*\right\}$ ist die Menge aller Spielfeldzustände, die von l aus mit beliebig vielen Schritten entstehen.

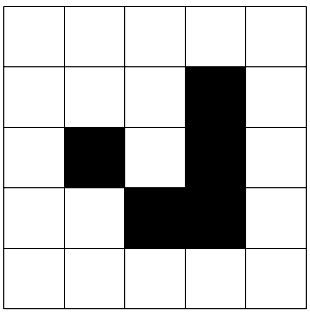
f) Wir orientieren uns an dem Spielfeldausschnitt, der in Teilaufgabe (a) gegeben ist:

$$\begin{aligned}&l\colon \mathbb{Z}^2 \to \{\square,\blacksquare\}\\&(i,j) \mapsto \begin{cases}\blacksquare, & \text{falls } i \in \{0,1\} \text{ und } j \in \{2,3\}\\ \blacksquare, & \text{falls } i \in \{2,3\} \text{ und } j \in \{0,1\}\\ \square, & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

g) Damit die Bedingung aus der Aufgabenstellung erfüllt ist, darf von l kein Spielfeldzustand erreichbar sein, in dem alle Zellen tot sind. Außerdem darf nicht $(l,l) \in \texttt{step}^+$ sein. Eine mögliche Lösung ist die folgende:

$$\begin{aligned}&l\colon \mathbb{Z}^2 \to \{\square,\blacksquare\}\\&(i,j) \mapsto \begin{cases}\blacksquare, & \text{falls } (i,j) \in \{(0,1),(1,0),(2,0),(2,1),(2,2)\}\\ \square, & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

Das Muster, das die lebendigen Zellen im folgenden Ausschnitt bilden, wird auch Glider genannt. Ein Glider „bewegt“ sich über das Spielfeld.



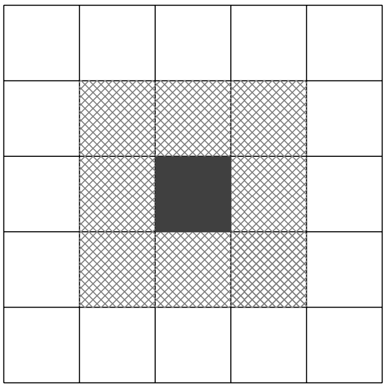


Abbildung 1: Die Nachbarschaft der Zelle ■, visualisiert mit ▩

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Lösungen **müssen** handschriftlich erstellt werden
- Ihre Abgabe sollte die erste Seite dieser Datei als Deckblatt haben
- Ihre Abgabe muss **rechtzeitig** erfolgen

Außerdem, wenn Sie Ihre Ausarbeitung über die Abgabekästen im Keller des Informatik-Gebäudes abgeben:

- Ihre Abgabe muss in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet werden
- Tablet-Ausdrucke sind zulässig

Wenn Sie Ihre Ausarbeitung online über ILIAS abgeben, dann achten Sie darauf:

- Ihre Abgabe muss **genau eine** PDF-Datei sein
- Scans und lesbare Fotos sind zulässig
- Abgabe erfolgt unter „Tutorien" im Ordner **Ihres** Tutoriums