Karlsruher Institut für Technologie

Institute of Information Security and Dependability
Dr. Mattias Ulbrich
https://formal.kastel.kit.edu/

Übungsblatt 9

Grundbegriffe der Informatik — Winter 2023/24

Tutor*in:

Tutorium Nr.:

Nach-,Vorname: ,

Matr.nr.:

Ausgabe: 16. Januar 2023, 14:30 Uhr

Abgabe: 26. Januar 2024, 12:30 Uhr

Bitte beachten Sie die Hinweise auf der letzten Seite.

*Von Tutor*in auszufüllen:*

Blatt 9: / 20

Blätter 1 – 9: / 182

Aufgabe 1 - Wegwanderung (4 Punkte)

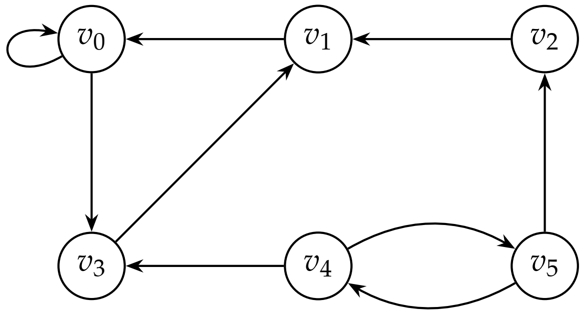


Abbildung 1: Ausgangsgraph G für Aufgabe 1

Gegeben sei der (gerichtete) Graph G, der in Abb. 1 dargestellt ist.

a) Geben Sie die Adjazenzmatrix A von G an. (1 Punkt)

b) Geben Sie die Wegematrix W von G an und zeichnen Sie den Graphen H, dessen Adjazenzmatrix W ist. Ergänzen Sie dazu Abb. 1 um weitere Kanten. (2 Punkte)

c) Gibt es einen gerichteten Graphen G', dessen Wegematrix W' ist? Falls es so ist, geben Sie einen solchen Graphen G' an. Ansonsten begründen Sie, warum es einen solchen Graphen G' nicht geben kann. (1 Punkt)

$$W' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

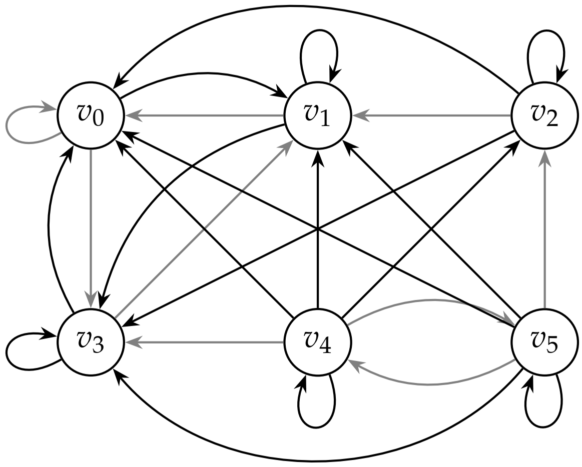
Lösung 1

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



c) W' kann keine Wegematrix sein, denn: $W'_{5,0} = 0$, aber $W'_{5,4} = 1$ und $W'_{4,0} = 1$, es gäbe also einen Weg von Knoten 5 zu Knoten 4 und von Knoten 4 zu Knoten 0, aber keinen Weg von Konten 5 zu Knoten 0.

Aufgabe 2 - Den Wald vor lauter Bäumen sehen (5 Punkte)

In der Vorlesung wurden ungerichtete Bäume als Graphen vorgestellt, in denen es zwischen zwei beliebigen Knoten genau einen Weg gibt. In dieser Aufgabe wollen wir uns mit weiteren Eigenschaften von Bäumen beschäftigen. Beweisen Sie dazu, dass für einen ungerichteten Graphen $U = (V, E)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.[1] In dieser Aufgabe werden Schlingen ausgeschlossen.

i) Zwischen zwei beliebigen Knoten $v, w \in V$ gibt es genau einen Weg.

[1] Um zu beweisen, dass mehrere Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jeweils paarweise äquivalent sind, genügt es zu zeigen, dass die Implikationen $A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \ldots, A_n \Rightarrow A_1$ gelten. Diese Beweistechnik nennt man Ringschluss.

ii) U ist azyklisch und zusammenhängend.

iii) U ist *minimal zusammenhängend*, also zusammenhängend und das Entfernen einer beliebigen Kante führt dazu, dass der resultierende Graph nicht zusammenhängend ist.

Lösung 2

- (i) $\Rightarrow$ (ii)

  Angenommen, U enthält einen Kreis $c = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_0)$. Dann gibt es zwei Wege zwischen v_0 und v_1, nämlich (v_0, v_1) und $v_1, v_2, \ldots, v_0$. Also ist der Weg zwischen v_0 und v_1 nicht eindeutig. $\lightning$ Widerspruch zu (i)

  Angenommen, U ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es $u, v \in V$ zwischen denen kein Pfad existiert $\lightning$ Widerspruch zu (i)

  Also ist U azyklisch und zusammenhängend.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii)

  U ist nach Voraussetzung zusammenhängend. Angenommen, U sei nicht minimal zusammenhängend, es gibt also eine Kante $e = \{v, w\} \in E$, sodass $U' = (V, E \setminus \{e\})$ zusammenhängend ist. Sei $p = (v, \ldots, w)$ der Weg zwischen v und w in U'. Dann bilden p und e einen Kreis in U. $\lightning$ Widerspruch zu (ii)

- (iii) $\Rightarrow$ (i)

  Seien $v, w \in V$ zwei beliebige Knoten. Da U nach Voraussetzung zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen Weg zwischen v und w.

  Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Wege $p_1 = (x_1 = v, \ldots, x_k = w)$ und $p_2 = (y_1 = v, \ldots, y_l = w)$ zwischen v und w. Sei x_s der Knoten auf p_1, für den $x_i = y_i$ für $i \leq s$ aber $x_{s+1} \neq y_{s+1}$ gilt und sei x_{k-t} der Knoten auf p_1, für den $x_{k-i} = y_{l-i}$ für $i \leq t$ aber $x_{k-t-1} \neq y_{k-t-1}$ gilt. Da p_1, p_2 verschieden sind, gibt es mindestens einen Knoten, der nur auf einem der beiden Pfade liegt, also müssen x_s, x_{k-t} existieren. Dann bilden die Teilwege von p_1, p_2 zwischen x_i und x_{k-t} einen Kreis. Entfernen wir eine beliebige Kante aus diesem Zyklus, erhalten wir einen zusammenhängenden Graphen mit $m - 1$ Kanten. $\lightning$ Widerspruch zu (iii)

Aufgabe 3 - Verbindungen knüpfen (4 Punkte)

Im folgenden Graphen sollen Kanten eingefügt werden. Diese können dazu entweder eingezeichnet werden oder als Tupel angegeben werden. Die Namen der

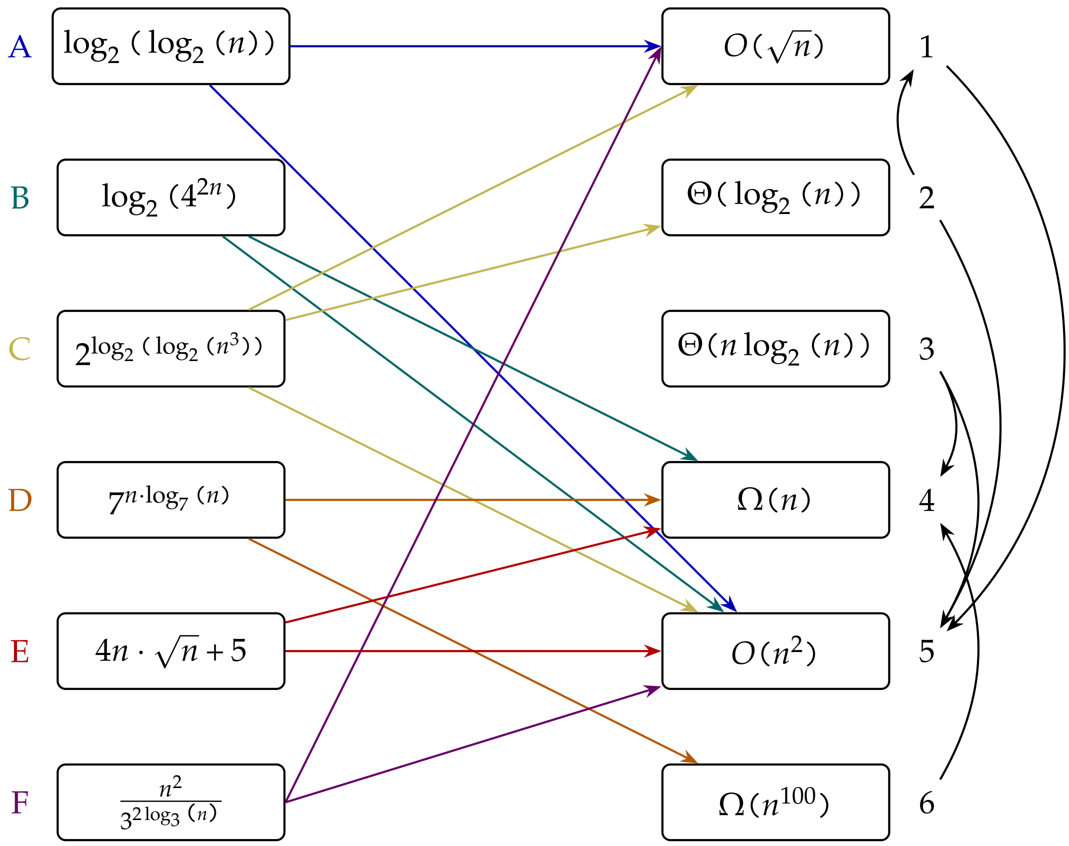
Knoten stehen dazu neben diesen. Die von Ihnen angegebene Kantenmenge soll die folgenden Eigenschaften erfüllen:

a) Zu jedem Knoten auf der linken Seite soll es genau dann eine gerichtete Kante zu einem Knoten auf der rechten Seite geben, wenn die zugehörige Funktion in der jeweiligen Menge enthalten ist. (2 Punkte)

b) Zu jedem Knoten v auf der rechten Seite soll es genau dann eine gerichtete Kante zu einem anderen Knoten u auf der rechten Seite geben, wenn die Menge zu v eine Untermenge der Menge zu u ist. (2 Punkte)

A	$\log_2(\log_2(n))$	$O(\sqrt{n})$	1
B	$\log_2(4^{2n})$	$\Theta(\log_2(n))$	2
C	$2^{\log_2(\log_2(n^3))}$	$\Theta(n\log_2(n))$	3
D	$7^{\log_7(n)\cdot\log_7(n)}$	$\Omega(n)$	4
E	$4n\cdot\sqrt{n}+5$	$O(n^2)$	5
F	$\frac{n^2}{3^{2\log_3(n)}}$	$\Omega(n^{100})$	6

Lösung 3



Dabei hilft es, die folgenden Vereinfachungen zu beachten:

- $\log_2(4^{2n}) = \log_2(2^{2 \cdot 2n}) = 4n \in \Theta(n)$
- $2^{\log_2(\log_2(n^3))} = \log_2(n^3) = 3 \cdot \log_2(n) \in \Theta(\log_2(n))$
- $7^{n \cdot \log_7(n)} = (7^{\log_7(n)})^n = n^n \in \Theta(n^n)$
- $\frac{n^2}{3^{2\log_3(n)}} = \frac{n^2}{n^2} = 1$

Aufgabe 4 - Rekurrenzen (7 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Rekurrenzen jeweils die explizite Lösung. Dokumentieren Sie dabei Ihren Lösungsweg nachvollziehbar und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

a)

$$T_1(n) = \begin{cases} 1 & \mid n = 1 \\ 2 \cdot T_1(\frac{n}{4}) & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

Für diese Teilaufgabe genügt es, wenn Sie die exakte explizite Lösung für Potenzen der Form $n = 4^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ angeben. (1 Punkt)

b)

$$T_2(n) = \begin{cases} 1 & \mid n = 1 \\ 3 \cdot T_2(n-1) & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

(1.5 Punkte)

c)

$$T_3(n) = \begin{cases} 1 & \mid n = 1 \\ T_3(n-1) + 3n & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

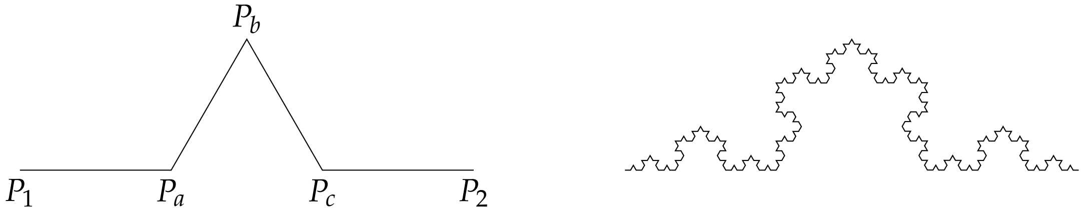
(1.5 Punkte)

Passend zur Witterung: Betrachten Sie nun den folgenden Algorithmus KOCH, der eine Seite einer Kochschen Schneeflocke nach einer gegebenen Anzahl von Iterationen zeichnet:

function KOCH
    Input: $n \in \mathbb{N}_0$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$
    if $n = 0$ **then**
        Zeichne Linie von P_1 **nach** P_2
    else
        Berechne P_a**,** P_b**,** $P_c \in \mathbb{R}^2$
        KOCH$(n-1,\ P_1,\ P_a)$;
        KOCH$(n-1,\ P_a,\ P_b)$;
        KOCH$(n-1,\ P_b,\ P_c)$;
        KOCH$(n-1,\ P_c,\ P_2)$;
    fi

In einer Iteration des Algorithmus (s. Abb. 2) für die Kochsche Kurve wird die übergebene Strecke P_1P_2 durch zwei Punkte P_a und P_c in drei gleiche Teilstrecken aufgeteilt. Die mittlere Teilstrecke wird nun über einen weiteren Punkt P_b so ausgestülpt, dass vier gleichlange Teilstrecken P_1P_a, P_aP_b, P_bP_c und P_cP_2 entstehen. Auf diese Teilstrecken kann KOCH nun rekursiv angewendet werden.

d) Stellen Sie eine Rekurrenzgleichung für die Laufzeit von KOCH auf. Gehen Sie dabei davon aus, dass sowohl das Zeichnen einer Linie als auch das Berechnen eines Punktes Elementaroperationen sind. (1 Punkt)



(a) für $n = 1$ (b) für $n = 4$

Abbildung 2: Iteration der Koch-Kurve

e) Stellen Sie eine Rekurrenzgleichung für die Anzahl von Linien auf, die von KOCH gezeichnet werden. Bestimmen Sie anhand dieser die Anzahl von Linien (als arithmetischen Ausdruck in Abhängigkeit von n), die gezeichnet werden müssen. (2 Punkte)

Lösung 4

a) In der Vorlesung wurde vorgestellt, dass die explizite Lösung einer Rekurrenz der Form

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \mid n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

genau $T(n) = n^{\log_b a}$ ist. Im Fall von T_1 ist $a = 2, b = 4$, also ist $T_1(n) = n^{\log_4 2} = n^{1/2} = \sqrt{n}$

b) Es gilt $T_2(n) = 3^{n-1}$. Das lässt sich zum Beispiel induktiv zeigen:

IA: $n = 1$: $T_2(1) \overset{\textbf{Def}}{=} 1 = 3^0$ ✓

IS: $n \rightsquigarrow n + 1$

IV: Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig, aber fest. Dann ist $T_2(n) = 3^{n-1}$.

IB: Es gilt $T_2(n + 1) = 3^{(n+1)-1} = 3^n$.

$$\begin{aligned} T_2(n+1) &= 3 \cdot T_2(n) \\ &\overset{\textbf{IV}}{=} 3 \cdot 3^{n-1} \\ &= 3^n \end{aligned}$$

□

c) Es gilt $T_3(n) = 3\left(\sum_{i=2}^{n} i\right) + 1$. Auch das lässt sich induktiv zeigen:

IA: $n = 1$: $T_3(1) \overset{\textbf{Def}}{=} 1 = 3\left(\sum_{i=2}^{1} i\right) + 1$ ✓

IS: $n \rightsquigarrow n+1$

IV: Sei $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig, aber fest. Dann ist $T_3(n) = 3\left(\sum_{i=2}^{n} i\right) + 1$.

IB: Es gilt $T_3(n+1) = 3\left(\sum_{i=2}^{n+1} i\right) + 1$.

$$\begin{aligned}
T_3(n+1) &= 3T_3(n-1) + 3(n+1) \\
&\overset{\textbf{IV}}{=} 3\left(\sum_{i=2}^{n} i\right) + 1 + 3(n+1) \\
&= 3\left(\sum_{i=2}^{n+1} i\right) + 1
\end{aligned}$$

□

d) Der Basisfall für KOCH ist $n = 0$; dann hat KOCH konstanten Aufwand. Ansonsten ruft KOCH sich vier Mal rekursiv auf, jeweils mit der Problemgröße $n-1$. Also:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \mid n = 0 \\ 4 \cdot T(n-1) + 3 & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

e) Der Basisfall für KOCH ist $n = 0$; dann wird genau eine Linie gezeichnet. Ansonsten ruft KOCH sich vier Mal rekursiv auf, jeweils mit der Problemgröße $n-1$. Also:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \mid n = 0 \\ 4 \cdot T(n-1) & \mid \text{sonst} \end{cases}$$

Die explizite Lösung dieser Rekurrenzgleichung ist $T(n) = 4^n$. Der Beweis dazu lässt sich analog zu dem in Teilaufgabe (b) führen. Also werden 4^n Linien gezeichnet.

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Lösungen **müssen** handschriftlich erstellt werden
- Ihre Abgabe sollte die erste Seite dieser Datei als Deckblatt haben
- Ihre Abgabe muss **rechtzeitig** erfolgen

Außerdem, wenn Sie Ihre Ausarbeitung über die Abgabekästen im Keller des Informatik-Gebäudes abgeben:

- Ihre Abgabe muss in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet werden
- Tablet-Ausdrucke sind zulässig

Wenn Sie Ihre Ausarbeitung online über ILIAS abgeben, dann achten Sie darauf:

- Ihre Abgabe muss **genau eine** PDF-Datei sein
- Scans und lesbare Fotos sind zulässig
- Abgabe erfolgt unter „Tutorien" im Ordner **Ihres** Tutoriums